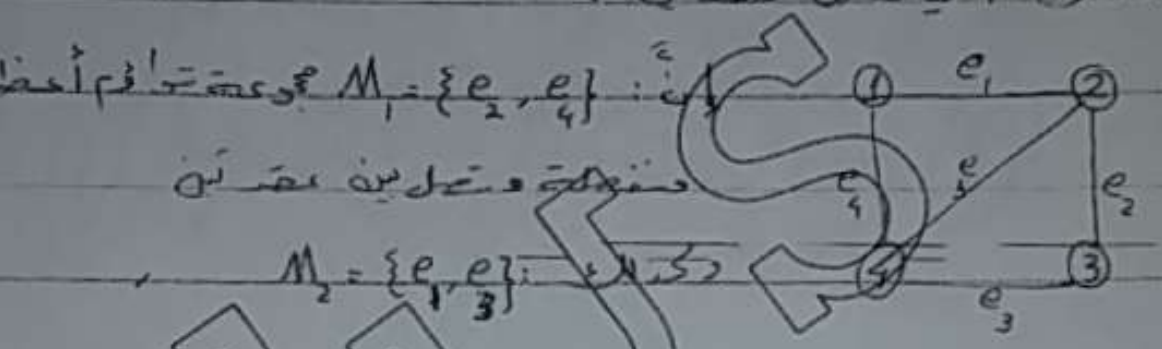
سنبدأ بجملة جديدة وهو: التوائم Matching

- Decomposition of Graph تحليل البيانات
- Domition of Graph تسطية البيان
- Marriye theory نظرية الزواج

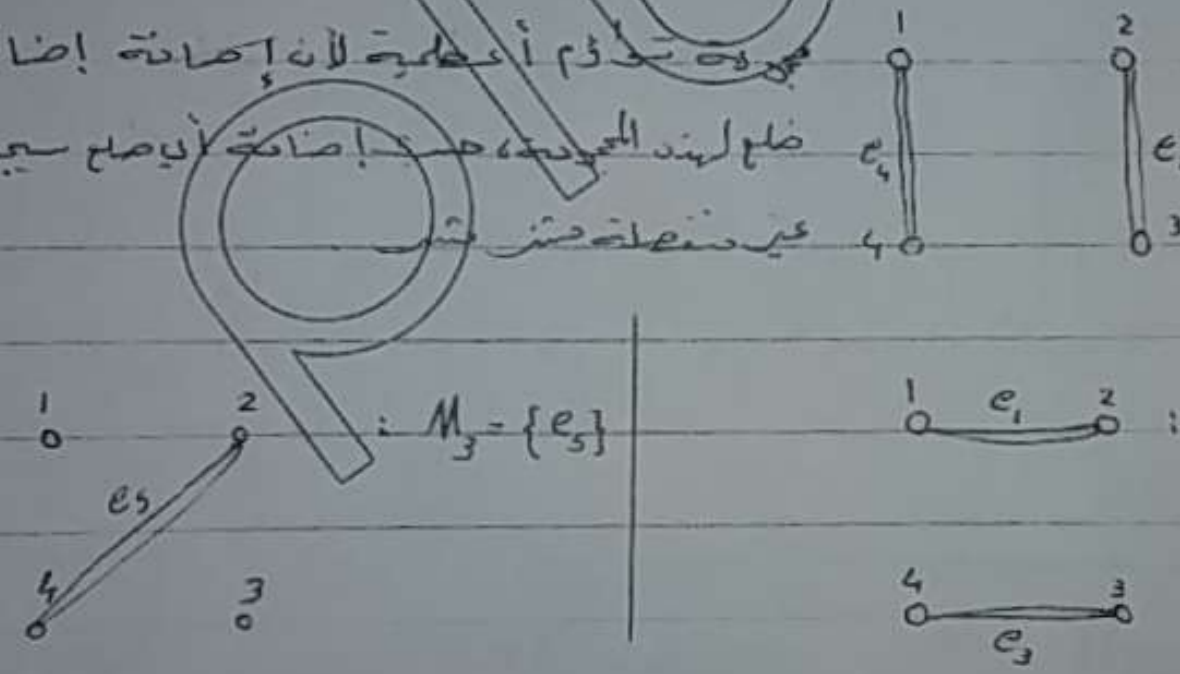
تعريف التوائم (Matching): هو عبارة عن مجموعة الأضلاع المنفصلة مثنى مثنى التي تصل عقدتين.

مثال: $M_1 = \{e_2, e_4\}$ مجموعة توائم أعظمية لأنها أضلاع منفصلة وتصل بين عقدتين

$M_2= \{e_1, e_3\}$ وكذلك $M_3 = \{e_5\}$



مجموعة توائم أعظمية لأن إضافة أي ضلع لهذه المجموعة، مع إضافة أي ضلع سيجعل المجموعة غير منفصلة مثنى مثنى



التوائم الأعظمي (الـ Matching الأعظمي): هو أكبر مجموعة أضلاع منفصلة مثنى مثنى.

ملاحظة: يمكن أن يكون في البيان أكثر من مجموعة توائم أعظمية.

ملاحظة: سنتعلم معظم الـ Matching لحل مسائل تطبيقية مختلفة.

Plus خدمات كلية العلوم ـ دمشق حرم كلية العلوم (Mob; 0944-879460 / Pho: 011-2151436)
Scanned by CamScanner

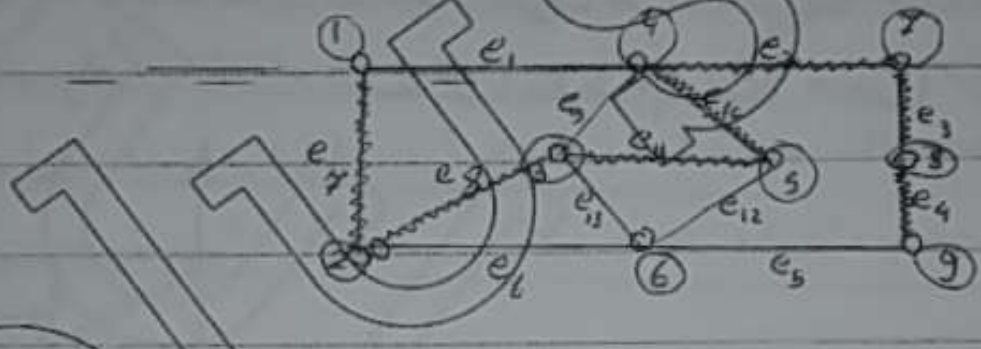
الضلع ضعيف للانفصال: Weak with respect ؛ هو الضلع الذي لموحة التوافق.

القمة الضعيفة: هي القمة التي تنتمي فقط للأضلاع الضعيفة.

مسار الـ Matching (M-path): هو عبارة عن مسار متناوب أضلاعه أضلاع توافق وأضلاع ضعيفة.

- إذا كان أول ضلع في المسار وآخر ضلع أحدهما ضلع ضعيف نقول أن المسار قابل للزيادة.
- إذا كان أول ضلع وآخر ضلع ينتمي إلى مجموعة التوافق نقول أن المسار غير قابل للزيادة

مثال:



مجموعة توافق: مثلاً $\{e_8, e_{10}, e_3\}$

مسار الـ Matching: ① e_7 ⑧ e_8 ③ e_{11} ⑤ e_{10} ④ e_2 ⑦ e_3 ⑧ e_4 ⑨

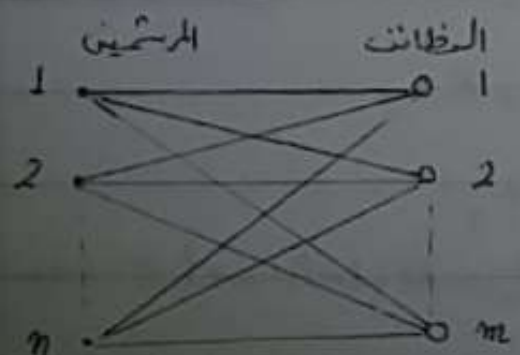
نلاحظ أنه مسار لأن: أضلاعه متناوبة من أضلاع التوافق (e_8, e_{10}, e_3) ومن أضلاع ضعيفة (e_7, e_{11}, e_4)

أي: $\{e_7, e_8, e_{11}, e_{11}, e_2, e_3, e_4\}$

ضعيف، ضلع توافق، ضعيف، ضلع توافق، ضعيف، ضلع توافق، ضعيف

وبما أن هذا المسار ابتدأ وانتهى بضلع ضعيف فهو مسار قابل للزيادة.

من تطبيقات نظرية الـ Matching:



لدينا m وظيفة و n مرشح للقيام بهذه الوظيفة وكل وظيفة تأخذ شخص واحد، وكل شخص يأخذ وظيفة واحدة، نريد اختيار أنسب شخص لأنسب مكان وهذه هي علة الـ Matching

(Mob; 0944-879460 / Pho: 011-2151436) خدمات كلية العلوم – دمشق حرم كلية العلوم Plus

Scanned by CamScanner

نظرية :

ليكن لدينا البيان G ولديه توأمين M_1, M_2 عندئذٍ

المركبة H هي البيان الذي يعد نتف البيان الأصلي ، لكن أضلاعه هي عبارة عن :

$$E(H) = (M_1 - M_2) \cup (M_2 - M_1)$$

أي أضلاعه : هي مجموعة الأضلاع التي تنتمي للتوأم الأول ولا تنتمي للتوأم الثاني . اجتماع الأضلاع التي تنتمي للتوأم الثاني ولا تنتمي للتوأم الأول .

عندئذٍ هذه المركبة تحقق إحدى الحالات التالية :

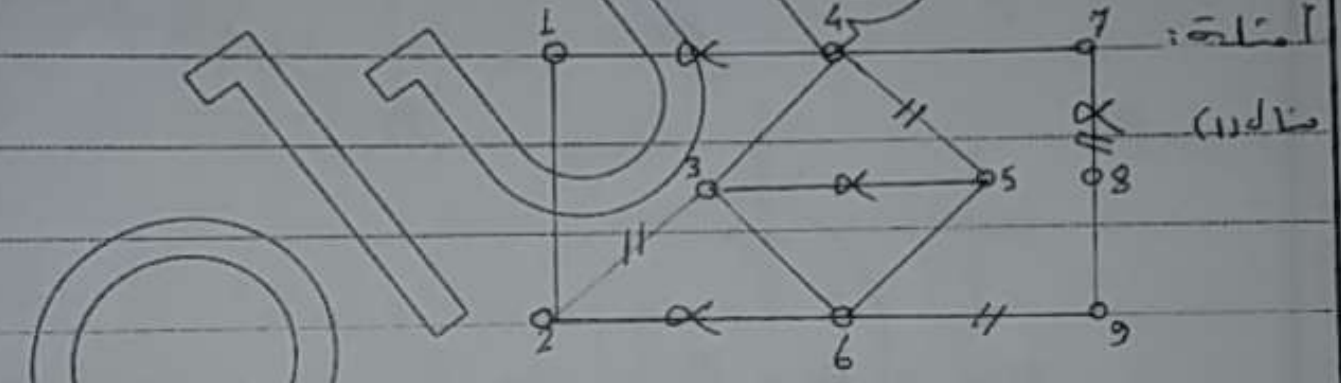
1- عقدها معزولة .

2- تشكل دارة أمناطيسية (حلقة) أضلاعها من M_1 و M_2 ذات طول زوجي .

3- تشكل مسار مختلف فيه يكون طرفه البداية وطرفه النهاية من هذا المسار يكون ضعيف إما بالنسبة لـ M_1 أو M_2 سنذكر أمثلة ثم نثبت صحتها /.

أمثلة :

مثال (1)



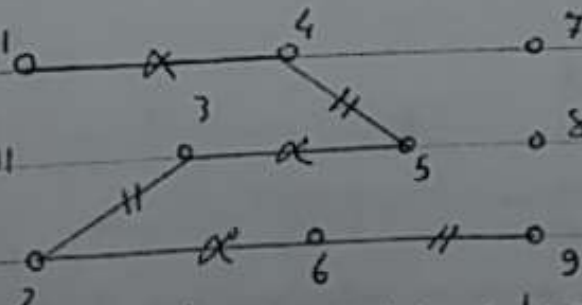
لتكن مجموعتا التوادم : $M_1 = \{(1,4), (3,5), (7,8), (2,6)\}$ ضعيف لها بـ ($\propto$)

$M_2 = \{(2,3), (4,5), (6,9), (7,8)\}$ ضعيف لها بـ (//)

وبالتالي المركبة H ستكون أضلاعها عبارة عن أضلاع مسار بدايته ونهايته ضعيف بالنسبة لأحد المسارين، $\{(1,4), (4,5), (3,5), (2,3), (2,6), (6,9)\}$

$$E(H) = \{(1,4), (4,5), (3,5), (2,3), (2,6), (6,9)\}$$

وهو من الشكل :



الضلع (1,4) ضعيف بالنسبة لـ M_2

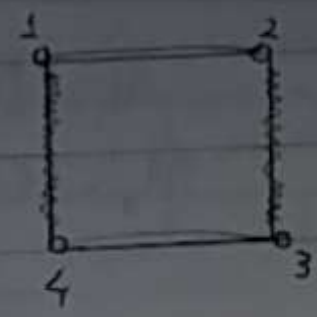
الضلع (6,9) ضعيف بالنسبة لـ M_1 .

ملاحظة : لا تأخذ الضلع المشترك بين مجموعتي التوادم مثل : (7,8)

(Mob; 0944-879460 / Pho: 011-2151436) خدمات كلية العلوم – دمشق حرم كلية العلوم Plus

Scanned by CamScanner

مثال 2 :

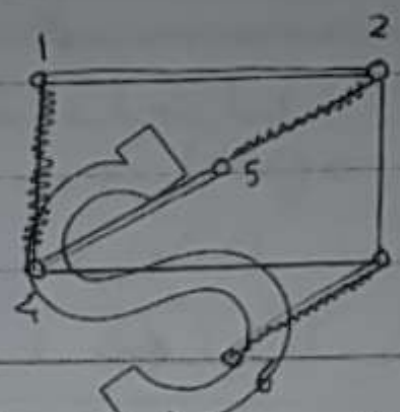


$M_1 = \{(1,2),(3,4)\}$ رسم السماد (=)

$M_2 = \{(1,4),(2,3)\}$ رسم السماد (||)

الركبة H : سيكون أضلاعها عبارة عن دائرة مسادية (ضلع من M_1 وضلع من M_2 المتبادلة) وستكون هي نفسها شكل السيارة الأصلي.

مثال 3 :

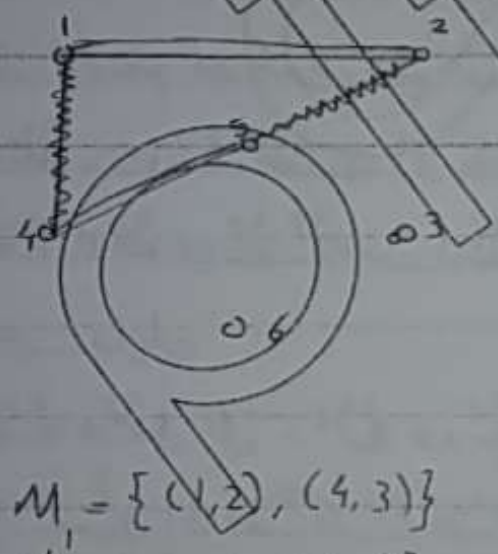


$M_1 = \{(1,2),(4,5),(3,6)\}$

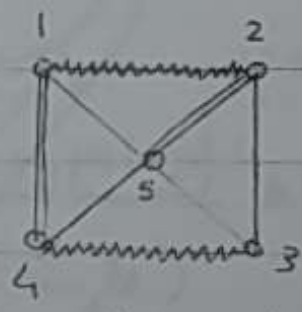
$M_2 = \{(1,4),(2,5),(3,6)\}$

الركبة H سيكون أضلاعها : $E(H) = \{(1,2),(4,5),(1,4),(2,5)\}$

وهي عبارة عن دائرة متبادلة.



مثال 4 :

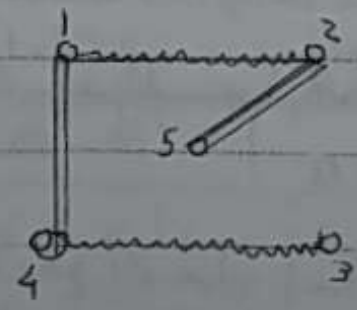


$M_1 = \{(1,2),(4,3)\}$

$M_2 = \{(2,5),(1,4)\}$

الركبة H : أضلاعها : $E(H) = \{(1,2),(2,5),(1,4),(4,3)\}$

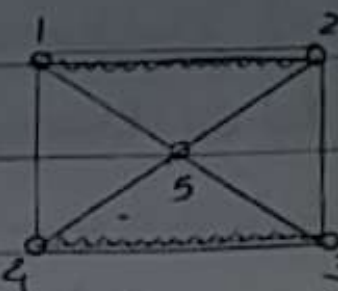
وشكل السيارة :



(Mob; 0944-879460 / Pho: 011-2151436) خدمات كلية العلوم – دمشق حرم كلية العلوم Plus

Scanned by CamScanner

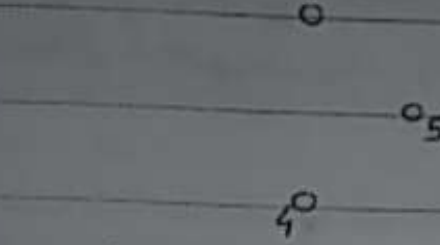
مثال 5 :



$M_1 = \{(1,2),(3,4)\}$

$M_2 = \{(1,2),(3,4)\}$

المركبة H : لن تحوي أي أضلاع لأن جميع أضلاع التواتم مشتركة وبالتالي ستكون عبارة عن عقد معزولة .



تعريف: درجة البيان هي أكبر درجة عقدة فيه ونرمز لها $\Delta(G)$.
أدنى درجة عقدة لكم لها $\delta(G)$.

نتيجة هامة النظرية السابقة :

لدينا خصوصاً درجة البيان H (H هي ستكون أصغر أو تساوي 2 ($\Delta(H) \leq 2$)
لأن كل عقدة لا يمكن أن تقع على أكثر من ضلع من M_1 أو من M_2) وهذا يعني أن المركبات للبيان H إما أن تكون مسار أو حلقة أو عقدة معزولة .

لنفرض أن المركبة H لا تحوي عقد معزولة إذا أردنا أن تتناوب فيها الأضلاع مرة من M_1 ومرة من M_2 ، غير مايلي :

1- إذا وجدنا تناوب نحصل على دائرة زوجية ،

2- إذا كانت مسار : لنثبت أن عقد طرفي هذا المسار ضعيفة بالنسبة لـ M_1 أو بالنسبة M_2 أي (كل عقدة من هذا المسار تقع إما على ضلع من M_1 أو من M_2) .

لنفرض أن العقدة v تقع على الضلع e ، إذا كان $\deg(v)=1$ عندئذٍ تكون هذه العقدة هي عقدة طرف ، وضعيفة بالنسبة لـ M_2 أو M_1 ؛ ($e \in M_1 \Leftarrow$ ضعيفة بالنسبة لـ M_2
$e \in M_2 \Leftarrow$ ضعيفة بالنسبة لـ M_1)

- إذا كانت $\deg(v) \geq 2$ عندئذٍ العقدة v تقع على ضلع إما من M_1 أو من M_2 لنفترض أنها تقع على الضلع e . $e \in M_1 - M_2 \Leftarrow e \notin M_2$ وهذا يعني أنه يمكن تمديد المسار بضلع جديد ينتمي لـ M_2 وهذا يناقض كون v عقدة طرف

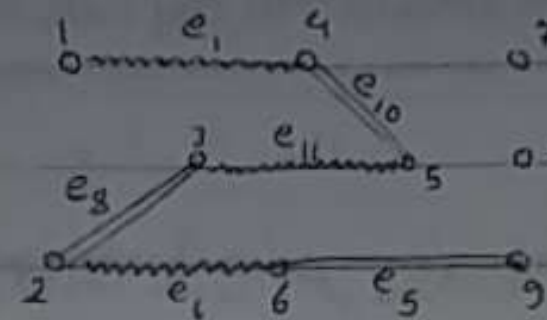
(Mob; 0944-879460 / Pho: 011-2151436) خدمات كلية العلوم – دمشق حرم كلية العلوم Plus
Scanned by CamScanner

وبالتالي هذه الحالة غير ممكنة، وبالتالي يتم إثبات المطلوب أن عدد أطراف المارة متساوية بالنسبة لـ M_1 أو M_2.

بالعودة للمثال ①:

$M_1 = \{(1,4), (3,5), (2,6), (7,8)\}$ (e_1, e_6, e_4)

$M_2 = \{(4,5), (3,2), (6,9), (7,8)\}$ (e_{10}, e_7, e_9)



نلاحظ أن له أضلاع والعقدة 7 ضمنة بالنسبة لـ M_2

والعقدة 9 ضمنة بالنسبة لـ M_1.

مبرهنة Berge

ليكن لدينا البيان $G(V,E)$، ليكن M توأم (Matching):

M يكون أعظمياً $\Leftrightarrow$ لا يوجد مسار زيادة

حيث مسار الزيادة هو كل أمسار أطرافه عقدة ضمنية.

الإثبات: نفرض أن M أعظمي، لنثبت أنه لا يوجد مسار زيادة.

نفرض جدلاً أنه يوجد مسار زيادة وليكن: path $\perp \{v_0\ v_1, v_2 \dots v_k\}$

$\{v_1\ v_2, v_3\ v_4 \dots v_{k-2}\ v_{k-1}\} \in M$، حيث k و M_1 عدد فردي،

لنشكل Matching من حديد:

$$M_1 = M - \{v_1\ v_2, \dots v_{k-2}\ v_{k-1}\} \cup \{v_0\ v_1, v_2 \dots v_{k-1}\ v_k\}$$

عندئذ: $|M_1| > |M|$ وهذا يناقض كون M أعظمي إذن لا يوجد مسار قابل للزيادة

($\Rightarrow$) نفرض أنه لا يوجد مسار زيادة ونريد إثبات أن M أعظمي.

نفرض جدلاً أن M ليس أعظمي، نشكل المركبة H حيث: إذا كانت M ليست أعظمية

إذن يوجد M_1 أعظمية: $E(H) = (M - M_1) \cup (M_1 - M)$

وحسب النظرية السابقة، المركبة H إما أن تكون عقد منزلة أو مسار ضمني بالأطراف بالنسبة لـ M_1 و M_2 أو دائرة مغلقة.

نفترض أنه يوجد مسار متناوب من أضلاع M_1 و M_2 وهذا المسار يكون مسار زيادة

(Mob; 0944-879460 / Pho: 011-2151436) خدمات كلية العلوم - دمشق حرم كلية العلوم Plus

Scanned by CamScanner

بالنسبة لـ M وذلك لأن M_1 قوي أصلاً أكثر من M إذن هو حاصل زيادة بالنسبة لـ M وهذا يناقض الفرض (عدم وجود أي زيادة في البيان).

نظرية د Hall:

ليكن لدينا البيان الزوجي $G((X,Y), E)$ يكون المجموعة X مغزية بمجموعة جزئية من Y إذا وفقط إذا تحقق عدد عناصر المجموعة S أصغر أو يساوي عدد جوارات المجموعة S، أي $(\forall S \subseteq X : |S| \leq |N(S)|)$

تعريف: جوار عقدة: ليكن البيان $G(V,E)$ ولتكن $v \in V$، جوار العقدة v هي مجموعة العقد التي تجاور العقدة v ونرمز لها $N(v)$.

- الجوار المغلق $N[v]$ هو جميع العقد التي تجاور العقدة v بالإضافة إلى العقدة v.

انتهت المحاضرة.

Plus خدمات كلية العلوم ـ دمشق حرم كلية العلوم (Mob; 0944-879460 / Pho: 011-2151436)
Scanned by CamScanner

القسم: الرياضيات التطبيقية السنة: الرابعة ..... المحاضرة: الثامنة عشرة.....

المادة: نظرية اللعبة الدكتور: خالد الكيفيين ..... التاريخ: يوم: 28 / 11 / 2016

مسألة الزواج

في مسألة الزواج نناقش حالة الاستقرار، لنفرض أنه لدينا مجموعة مكونة من n شاباً و m فتاة، ولكل شاب تفاضل صارم حيال الأفضلية لكل مجموعة على حدى بحيث نكمل تواثم حيث الاستقرار علماً أن كل شاب لديه مجموعة أفضليات وكل فتاة لها مجموعة أفضليات.

خوارزمية الاستقرار:

١- كل شاب يقدم عرضاً لخياراته.

٢- كل فتاة تقرر عرض الأفضليات.

٣- نرفض الحالات التي لا يحملها أي عرض.

٤- الشباب الذين تم رفض عرضهم يحددون الخيار الأفضل الثاني الذي لم يصله رد بالرفض حتى الآن.

٥- نكرر الخطوة (٤) حتى نحصل على حالة عدم رفض أي عرض.

نلاحظ أن هذه الخوارزمية ستتوقف بعدد خطوات.

مثال على مسألة الزواج:

جدول:

الخيارات للشباب	w_1	w_2	w_3	w_4
m_1	1	2	3	4
m_2	1	4	3	2
m_3	2	1	3	4
m_4	4	1	3	2

جدول الخيارات للفتيات:

الخيارات للفتيات	m_1	m_2	m_3	m_4
w_1	3	4	2	1
w_2	3	1	4	4
w_3	2	3	4	1
w_4	3	2	1	4

سوف نرمز للرفض بـ (ر)، عدم الرفض (ع.ر)، والقبول (ق)، عدم القبول (ع.ق).

Plus خدمات كلية العلوم ـ دمشق حرم كلية العلوم (Mob; 0944-879460 / Pho: 011-2151436)

Scanned by CamScanner

ناقشة عرض الشاب:

العرض الأول P_1:

m_1 بالنسبة لـ w_1 سيم ، رفض وعدم قبول.

m_2 بالنسبة لـ w_1 رفض لأنه (الشاب m_2 والشاب m_1 يعرفون الخياط w_1 رقم 1 لكن بياناته الفتيات عند أنها تفرح الشاب m_1 رقم 3 والشاب m_2 رقم 4 مباشرة عن الأكيد أنها سترفض الشاب m_2)

m_3 بالنسبة لـ w_1 عم ، رفض وعدم قبول.

m_4 بالنسبة لـ w_1 عم ، رفض وعدم قبول.

العرض الثاني: P_2 :

m_1 : سيقر خياطه المفضل w_1 بوعدم ، رفض وعدم قبول.

m_2 : بالنسبة لـ w_1 هو سيم ، رفض وعدم قبول.

m_3 : بالنسبة لـ w_1 عم ، رفض وعدم قبول.

m_4 : بالنسبة لـ w_1 رفض.

العرض الثالث P_3 :

m_1 : بالنسبة لـ w_1 عم ، رفض وعدم قبول.

m_2 : بالنسبة لـ w_1 عم ، رفض وعدم قبول.

m_3 : بالنسبة لـ w_2 ، رفض.

m_4 : بالنسبة لـ w_1 عم ، رفض وعدم قبول.

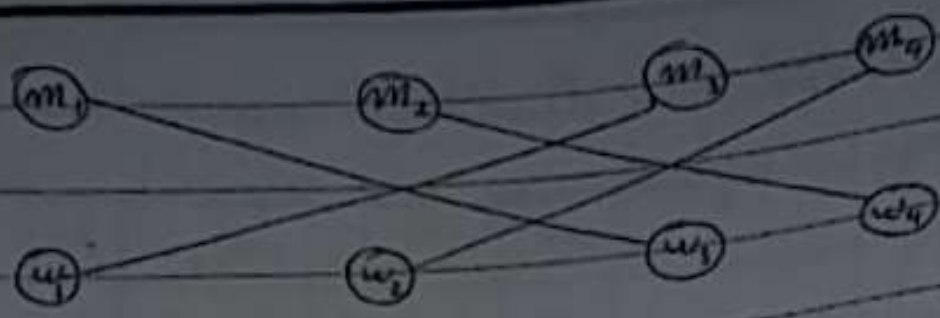
ونعمل بنفس الطريقة نحصل على الجدول.

	P_6	P_5	P_4	P_3	P_2	P_1	
نتوقف عند حصولنا على عاصمة لين فيه أي رفض ومن اللرفض د (*)	3	2*	1*	1	1	1	m_1
	4	4	4	4	4	1*	m_2
	1	1	1	2*	2	2	m_3
	2	2	2	2	4*	4	m_4

Plus خدمات كلية العلوم ـ دمشق حرم كلية العلوم (Mob; 0944-879460 / Pho: 011-2151436)

Scanned by CamScanner

من الحل الأخير نجد:



نشرح عن اتجاه الجدول السابق:

نضع الخيار الأول للشاب في الاحتمال الأول (العمود الأول)، ثم ننظر أي واحد منهم يعرض ذلك على النحو التالي: نجد أن الفتاة w_1 ستقدم لها شابان كل منهما يضعها كمرتبة أولى، لأنها تضع الأول مرتبة 3، والثاني مرتبة 4. أي أنها سترفض الشاب الثاني حتماً.

ثم تنتقل للاحتمال الثاني (العمود الثاني): نضع أحسن الخيارات التي لم ترفض في العمود الأول، وهو حسب الجدول (1, 2, 4) أي أن w_2 سترفض ذلك، نبحث عن أفضليتها الثانية، نجد أنه m_4 خياره الثاني هو w_4، أصبح لدينا شابان m_1 و m_4 خيارهم المفضل w_4، لكن ننظر إلى خيارات الفتيات نجد أن w_4 تضع الشاب m_1 خيارها الثالث و m_4 خيارها الرابع أي أنها سترفض الشاب m_4.

ثم ننتقل للاحتمال الثالث: نضع فيه الخيارات التي ليس لها رفض، أما الخيار المرفوض نبحث عن خياره المفضل الثاني فنجد أن m_3 و m_4 يفضلون w_2 لكن w_2 تضع الشاب m_3 خيارها الرابع و m_4 خيارها الثاني أي أن الشاب m_2 سيُرفض.

باختصار سنشكل:

الاحتمال الرابع: كان الرفض يضع الخيار التالي لـ m_1، فنجد m_1 و m_3 يفضلون w_1 لكن w_1 خياراتها بالنسبة لـ m_1 و m_3 هي 3, 2 على الترتيب أي m_1 سيُرفض.

الاحتمال الخامس: نضع مكان رفض m_1 خياره التالي وهو w_2 فنجد m_1 و m_4 لديهم نفس الخيار w_2، لكن w_2 خياراتها بالنسبة لـ m_1 و m_4 هي 3, 2 على الترتيب أي أن m_1 سيُرفض.

الاحتمال السادس: بنفس الطريقة السابقة.

(Mob; 0944-879460 / Pho: 011-2151436) محمد كلية العلوم – دمشق حرم كلية العلوم Plus

Scanned by CamScanner

سنحصل لنا عود لسعنه أي رفض توقف، ستحل بهذه الحالة
أي m_1 سيأخذ w_3، m_2 سيأخذ w_4، m_3 سيأخذ w_1، m_4 سيأخذ w_2

في حال جعلنا الفتيات يضعن الأفضليات والشباب هي تختار أي:

	m_4	m_3	m_2	m_1	
	1	2	4	3	w_1
	2	4	1	3	w_2
	1	4	3	2	w_3
	4	1	2	3	w_4

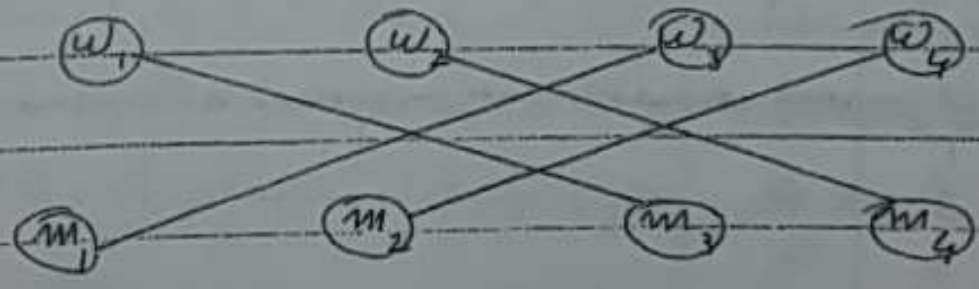
m_4	m_3	m_2	m_1	
4	2	1	1	w_1
2	1	4	2	w_2
3	3	3	3	w_3
1	4	2	4	w_4

بنفس الطريقة السابقة سنحل الجدول، سنحصل على النتائج من الجدول التالي

P_5	P_4	P_3	P_2	P_1	
3	3	3	3	4*	w_1
4	4	2*	2	2	w_2
1	4*	4	4	4	w_3
2	2	2	3*	3	w_4

ننتبه أثناء حلنا نفس نتيجة الحالة السابقة.

أي:



5 (Mob; 0944-879460 / Pho: 011-2151436) خدمات كلية العلوم – دمشق حرم كلية العلوم Plus

Scanned by CamScanner

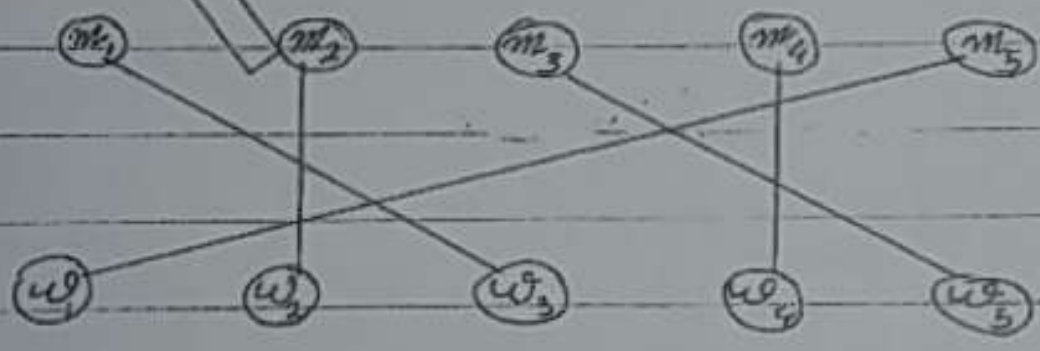
خطوة 1: أوجد مجموعة الـ Matching الثابتة

w_5	w_4	w_3	w_2	w_1	W_{man}
5	4	1	3	2	m_1
4	6	3	1	2	m_2
2	1	5	3	4	m_3
5	4	1	2	3	m_4
3	5	4	3	1	m_5

w_5	w_4	w_3	w_2	w_1	M_{an}
5	4	2	3	1	m_1
3	2	5	1	2	m_2
4	5	3	2	1	m_3
4	1	2	3	5	m_4
3	2	5	4	1	m_5

حل الخطوة 1:

	P_4	P_3	P_2	P_1	
	3	3	3	1*	m_1
	2	2	2	2	m_2
	5	3*	2*	1*	m_3
	4	4	4	4	m_4
	1	1	1	1	m_5



انتهت المحاضرة.

(Mob; 0944-879460 / Pho: 011-2151436) خدمات كلية العلوم – دمشق حرم كلية العلوم Plus
Scanned by CamScanner