Syria Math

تحليل ١

الدكتور : نايف طلي

المحاضرة : الثالثة عشرة

إعداد : رهف + رسمية + شهيناز

Web: www.syriamath.net

group: Improve our mathematics

13
Mathematics Group

075549

التحليل 1

2016 – 2017 الفصل الأول

MIMOZEYN

/نهاية الدوال العددية/

نهاية دالة f عند a هي b

$$\lim_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = b \in \mathbb{R}$$

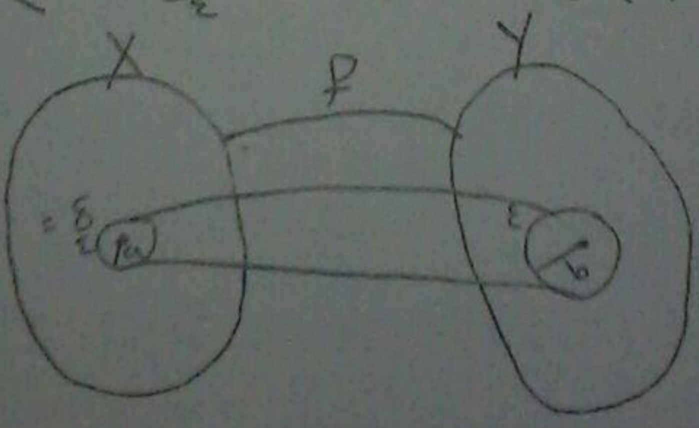
تعريف:

نقول عن b أنها نهاية الدالة f المعرفة في جوار a باستخدام (ε, δ) إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : |x-a| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$$

$|x-a| < \delta_\varepsilon$ | $|f(x)-b| < \varepsilon$

$a-\delta_\varepsilon < x < a+\delta_\varepsilon$ | $b-\varepsilon < f(x) < b+\varepsilon$



مثال: أثبت أن الدالة $f(x)=3x+2$ نهايتها تساوي (5) عندما $(x\to 1)$ مستخدماً (ε, δ):

الحل:

يجب أن يتحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta_\varepsilon>0 \quad |x-1|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |3x+2-5|<\varepsilon$$

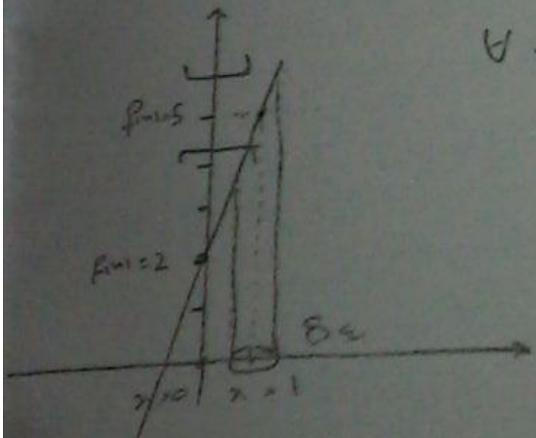
$$|3x+2-5| = |3x-3| = 3|x-1|$$

نجعل $3|x-1|<\varepsilon$

$$\Rightarrow 0\leq |x-1|<\frac{\varepsilon}{3}$$

نختار $0<\delta_\varepsilon\leq\frac{\varepsilon}{3}$

للتأكد من صحة اختيار δ_ε نعوض في التعريف



$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta_\varepsilon>0 : \quad 0<\delta_\varepsilon\leq\frac{\varepsilon}{3}$$

$$|x-1|<\delta_\varepsilon$$

$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{3}$$

$$3|x-1|<\varepsilon$$

$$|3x-3|<\varepsilon$$

$$|3x+2-5|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(x)-5|<\varepsilon$$

هـ ح

Mob : 0992279031
Tel : 214373

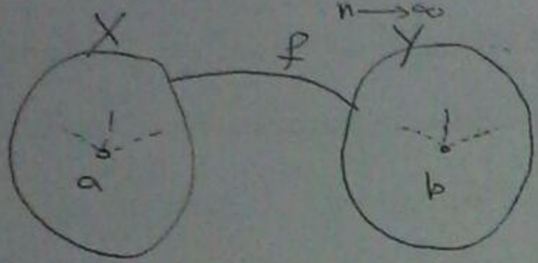
تعريف باستخدام المتتاليات:

نقول b أنها نهاية الدالة f المعرفة في جوار a

باستخدام المتتاليات إذا تحقق الشرط:

$$\forall \{x_n\}_{n\in N} : \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$$



مثال: أثبت أنه ليس للدالة $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ نهاية عند $x = 0$ باستخدام المتتاليات:

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi} = 0$$

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} = 0$$

$$f(x_n) = \sin(2n\pi) : \lim_{x\to\infty} f(x_n) = 0 = b_1$$

$f(x) = \sin\left(2x\pi + \frac{\pi}{2}\right)$: $\lim f(x) = 1 = b_1$

ليس للدالة نهاية عند $x \to \infty$ إذا $b_1 \neq b_2$

نهاية الدالة العددية عند اللانهاية:

تقول عن b أنها نهاية الدالة f المعرفة في جوار اللانهاية إذا تحقق الشرط:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

مثال

- $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

- $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 1}{3x^2 + 2} = \frac{2}{3}$

الدوال اللامتناهية في الصغر:

نقول عن الدالة f إنها لامتناهية في الصغر في جوار a إذا تحقق الشرط:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

مثال: $n \in N$

- $\lim_{x \to 0} x^n = 0$

$$\lim_{x \to 1} (x-1)^n = 0$$

(4)

الدالة اللامتناهية في الكبر

نقول عن الدالة f أنها لامتناهية في الكبر عند جوار النقطة a إذا تحقق الشرط:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

أو

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

مثال

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

تكافؤ الدوال اللامتناهية في الصغر:

$\alpha(x) \;,\; \beta(x)$

نقول عن الدالتين اللامتناهيتان في الصغر أنهما متكافئتان في جوار a إذا تحقق الشرط:

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

مثال:

$$- \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x \underset{x \to 0}{\overset{\text{تكافؤ}}{\sim}} x$$

$$- \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Rightarrow e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1 \Rightarrow \ln(x+1)\underset{x\to 0}{\sim} x$$

خواص النهايات

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)=A$　$\lim_{x\to a} g(x)=B$

فإن

1) $\lim_{x\to a}(f(x)\mp g(x))=A\mp B$

2) $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$

3) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$; $B\neq 0$

; $g(x)\neq 0$

4) إذا كانت $f(x)$ لامتناهية في الصغر في جوار a وكانت $g(x)$ دالة محدودة في جوار a عندها $f(x)\cdot g(x)$ لامتناهية في الصغر في جوار a

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$$

5) إذا كانت $f(x)$ لامتناهية في الصغر في جوار a فإن $\frac{1}{f(x)}$ دالة لامتناهية في الكبر في جوار a (والعكس صحيح)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0} x=0$$

Mob : 0992279031　Tel : 214

النهايات المشهورة :

① $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{q(x)} = \lim \frac{a_n x^n + \cdots a_0}{b_m x^m + \cdots b_0} \qquad a_n \neq 0,\ b_m \neq 0$$

$$= \begin{cases} \infty & n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & m = n \\ 0 & n < m \end{cases}$$

2) $$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

3) $$\lim \frac{(1+x)^k - 1}{x} = K$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \qquad \alpha > 0$$

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}$$

$$= \frac{e}{e^{-1}} = e^2$$

أو طريقة أفرى:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-1)+2}{(x-1)}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x-1+1}$$

$$= \lim\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x-1} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)$$

$$= e^2 \times 1$$

$$= e^2$$

أدرس نهاية الدوال مع الرسم عند النقطة المشار إليها في جوار الدالة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x>0 \\ x^2 & x\geq 0 \end{cases} \qquad x\neq 0$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases} \quad x = 1$$

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \quad x = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 2x+1 & x \geq 1 \end{cases} \quad x = 1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2+2x-3} = \frac{0}{0}$$ عدم تعيين

$$\lim_{x \to 1} \frac{(2-\sqrt{x+3})\,(2+\sqrt{x+3})}{(x-1)\,(x+3)\,(2+\sqrt{x+3})}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+3)(2+\sqrt{x+3})} = -\frac{1}{16}$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$g(x) = \frac{2}{x-1} \qquad \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$(g \circ f)(x) = ?$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

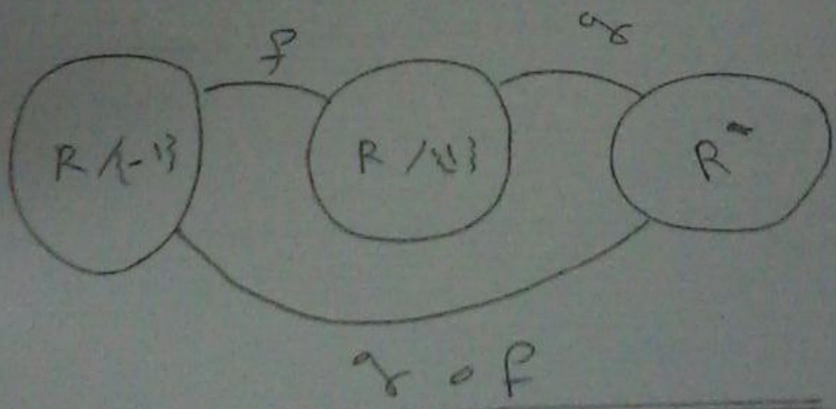
...ستدل لكل x من $g(x)$ ، $f(x)$

$$= g\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \frac{2}{\frac{x}{x+1} - 1}$$

$$= \frac{2}{\frac{x - x - 1}{x+1}} = \frac{2}{-\frac{1}{x+1}}$$

$$= -2(x+1)$$



أنتهت المحاضرة.