نظرية الاحتمالات

التغاير وخصائصه: } تم ذكره في نهاية المحاضرة السابقة
الصيغة المختزلة لحساب التغاير

$$cov(X,Y) = E(X.Y) - EX.EY$$

البرهان: بالتعريف لدينا:

$$cov(X,Y) = E((X-EX)(Y-EY))$$

$$= E[X.Y + EX.EY - Y EX - X.EY]$$

(التوقع الرياضي للمتغير مقدار ثابت)

$$\Rightarrow cov(X,Y) = E(X.Y) + \cancel{EX.EY} - \cancel{EX.EY}$$

$$cov(X,Y) = \boxed{EX.Y - EX.EY}$$

~~حيث تعرف~~

حيث $E(X.Y)$ نعطي (نعرف) ب:

$$E(X.Y) = \begin{cases} \sum_x \sum_y x.y\, f(x,y) & ; \text{متقطع } (X,Y) \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x.y\, f(x,y)\,dx\,dy & ; \text{مستمر } (X,Y) \end{cases}$$

((مبرهنة)) هام سؤال دورات الامتحانات

إذا كان X و Y مستقلين عشوائياً فإن:

$$E(X.Y) = EX.EY$$

البرهان: (حالة الاستمرار) لدينا بالتعريف

$$E(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x.y\, f(x,y)\,dx\,dy$$

وبما أن X, Y مستقلين عشوائياً نجد أن الشرط التالي محقق:

$$f(x,y) = f_X(x) . f_Y(y)$$

وبالتالي:

$$E(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x.y\, f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy$$

/ /

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x)\, dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y \, f_Y(y)\, dy$$

$$= E(X) \cdot E(Y)$$

نتيجة: اذا كان X , Y مستقلين عشوائياً فإن $cov(X, Y) = 0$

لأن: $cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$

وبسبب الاستقلال

$$= EX \, EY - EX \cdot EY = 0$$

ملاحظة: هذه النتيجة هامة جداً وإذا أتت في الامتحان كحل لإثباتها يجب اثبات البرهنة السابقة أولاً ومن ثم نكتب لأن......

مبرهنة:

$$V(X \mp Y) = V(X) + V(Y) \mp 2\, cov(X, Y)$$

البرهان: بالتعريف لدينا:

$$V(X \mp Y) = E(X \mp Y)^2 - (E(X \mp Y))^2$$

$$= E[X^2 + Y^2 \mp 2XY] - [(E(X))^2 + (EY)^2 \mp 2 EX EY]$$

$$= V(X) + V(Y) \mp 2\, cov(X, Y).$$

(هام) نتيجة: إذا كان X , Y مستقلين عشوائياً فإن:

$$V(X \mp Y) = V(X) + V(Y)$$

لأن: $cov(X, Y) = 0$

(هام) نتيجة: $cov(X, X) = V(X)$

لأن:

الصيغة المختزلة

$$cov(X, X) = E(X \cdot X) - EX \cdot EX$$

$$= EX^2 - (EX)^2 = V(X)$$

نتيجة: $cov(aX + b, cY + d)$

$$= a \cdot c \; cov(X, Y)$$

(هام) البرهان:

$$\operatorname{cov}(aX+b,\ cY+d)$$

$$= E[(aX+b)(cY+d)] - \underline{E(aX+b)\,E(cY+d)}$$

$$= E[\underline{ac}\,XY + cbY + adX + bd] -$$

$$[\underline{acEX}\cdot EY + adEX + bcEY + bd]$$

$$= acE(X.Y) + \cancel{cbEY} + \cancel{adEX} + \cancel{bd} - acEXEY$$

$$-\cancel{adEX} - \cancel{bcEY} - \cancel{bd}$$

$$= ac[E(X.Y) - EX.EY)$$

$$= a.c\ \operatorname{cov}(X,Y)$$

$$\boxed{\operatorname{cov}(aX+b,\ cY+d) = a.c\ \operatorname{cov}(X,Y)}$$

معامل الارتباط وخصائصه:

تعريف: ليكن X , Y متغيرين عشوائيين لهما عزوم من المرتبة الثانية

$$(E|Y|^2 < \infty \quad \text{و} \quad E|X|^2 < \infty)$$

نعرف معامل الارتباط بين المتغيرين X , Y بالعلاقة:

$$\boxed{\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\ \sigma_Y}}$$

نتيجة: إذا كان X و Y مستقلان عشوائياً فإن: $\rho(X, Y) = 0$

لأن $cov(X, Y) = 0$

خواص معامل الارتباط:

① $\rho(X, X) = 1$ لأن:

$$\rho(X, X) = \frac{cov(X; X)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(X)}} = \frac{V(X)}{V(X)} = 1$$

② $-1 \leq \rho(X; Y) \leq +1$

البرهان: نستخدم متراجحة شوارتز:

$$(E(X \cdot Y))^2 \leq E X^2 \cdot E Y^2$$

باستبدال X بـ: $X - EX$ و

Y بـ: $Y - EY$

من المتراجحة نجد أن:

$$[E(X - EX)(Y - EY)]^2 \leq E(X - EX)^2 \, E(Y - EY)^2$$

$$[cov(X, Y)]^2 \leq V(X) \cdot V(Y)$$

$$\Rightarrow \frac{cov^2(X, Y)}{V(X) \; V(Y)} \leq 1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \; \sqrt{V(Y)}} \right]^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow (\rho(X, Y))^2 \leq 1$$

$$\overset{\text{بالجذر}}{\Rightarrow} |\rho(X, Y)| \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$$

③

$$\rho(aX+b\,,\,cY+d)=\begin{cases}\rho(X,Y) & ;\ ac>0\\ -\rho(X,Y) & ;\ ac<0\end{cases}$$

البرهان: بالتعريف لدينا

$$\rho(aX+b\,;\,cY+d)=\frac{cov(aX+b\,,\,cY+d)}{\sqrt{V(aX+b)}\,\sqrt{V(cY+d)}}$$

حسب خواص cov و V

$$=\frac{a\cdot c\ cov(X,Y)}{|a|\sqrt{V(X)}\cdot|c|\sqrt{V(Y)}}$$

$$=\frac{ac}{|a||c|}\rho(X,Y)=\begin{cases}\rho(X,Y) & ,\ ac>0\\ -\rho(X,Y) & ,\ ac<0\end{cases}$$

نتيجة (دون برهان):

الشرط اللازم والكافي ليكون X و Y مرتبطين خطياً هو أن يكون

$$\rho^2(X,Y)=1$$

مثال: ليكن (X , Y) شعاعاً عشوائياً له جدول الكثافة المشتركة التالية.

Y \ X	-1	0	1
-2	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
0	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

١- استنتج الكثافات الهامشية ثم عين $\rho(X,Y)$ هل X, Y مستقلان عشوائياً؟

الحل :

X	-1	0	1	مجموع
$f_X(x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

Y	-2	0	2	مجموع
$f_Y(y)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

لنعين $f(X,Y)$ نحتاج لحساب المقادير التالية:

- EX , EY
- $EXEY$; EY^2 ; EX^2
- $V(X)$; $V(Y)$; $cov(X;Y)$

$$E(X) = \sum_x x \, f_X(x)$$

$$= (-1)\left(\frac{4}{10}\right) + 0\left(\frac{3}{10}\right) + (1)\left(\frac{3}{10}\right)$$

$$= \frac{-1}{10}$$

$$EX^2 = \sum_x x^2 f_X(x)$$

$$= (-1)^2\left(\frac{4}{10}\right) + (0)^2\left(\frac{3}{10}\right) + (1)^2\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{7}{10}$$

$$\Rightarrow V(X) = EX^2 - (EX)^2$$

$$= \frac{7}{10} - \left(\frac{-1}{10}\right)^2 = \frac{69}{100}$$

$$E(Y) = \sum_y y \, f_Y(y)$$

$$= (-2)\left(\frac{4}{10}\right) + (0)\left(\frac{2}{10}\right) + (2)\left(\frac{4}{10}\right) = 0$$

$$E(Y^2) = \frac{32}{10}$$

$$\Rightarrow V(Y) = EY^2 - (EY)^2$$

$$= \frac{32}{10} - 0 = \frac{32}{10}$$

$$E(X Y) = \sum_x \sum_y x \, y \, f(x, y)$$

$$= (-1)(-2)\left(\frac{2}{10}\right) + (-1)(0)\left(\frac{1}{10}\right) +$$

$$(-1)(2)\left(\frac{1}{10}\right) + (0) + (1)(-2)\left(\frac{1}{10}\right) + (1)(0)\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$+ (1)(2)\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{2}{10}$$

اذن نجد

$$\operatorname{cov}(X, Y) = EXY - EX\,EY$$

$$= \frac{2}{10} - \left(\frac{-1}{10}\right)(0)$$

$$= \frac{2}{10}$$

وبالتالي نكون:

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{\frac{2}{10}}{\sqrt{\frac{69}{10}}\sqrt{\frac{32}{10}}} \approx 0{,}135$$

وبالتالي: $\rho(X, Y) \neq 0$

اذن X و Y غير مستقل عشوائيًا.

انتهت المحاضرة السابعة عشر