تحليل ١

الدكتور : نايف طلي

المحاضرة : العاشرة

التاريخ : ٢٠/١١/٢٠١٢

إعداد : رهف + رسمية + شهيناز

المحاضرة (١٠)

م٢٠١٠/١١/

* معايير التقارب للسلاسل المتناوبة والمختلطة

1) المعيار الصفري:

إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ متقاربة فإنه السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة وتحقق الشرط:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

2) معيار دالمبير:

إذا كانت السلسلة $\sum a_n$ متناوبة أو مختلطة وكان

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$$

فإن:

- إذا كانت $l<1$ فإن $\sum a_n$ متقاربة بالإطلاق
- " " $l>1$ " $\sum a_n$ متباعدة

3) معيار الجذر النوني (كوشي):

إذا كانت السلسلة $\sum a_n$ متناوبة أو مختلطة وكان

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = R$$

فإن:

- إذا كانت $R<1$ فإن $\sum a_n$ متقاربة بالإطلاق
- " " $R>1$ " $\sum a_n$ متباعدة

* معيار لايبنز للسلاسل المتناوبة:

إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ متناوبة وتحقق الشرط:

1- $a_n \ge 0$

2- $\{a_n\}$ متناقصة

3- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

فإنه: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ متقاربة

* معيار كوشي التجميعي:

- إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تحقق الشروط:

1- $a_n \ge 0$

2- $\{a_n\}$ متناقصة

- عندئذ الشرط الكافي واللازم لتكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة هو أن تكون $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2k}$ متقاربة

* تعريف السلسلة المتناوبة:

تعريف: نقول عن سلسلة أنها متناوبة إذا كانت كل حدين متجاورين فيها إشارتين مختلفتين وهي من الشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1+a_2-a_3+a_4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1-a_2+a_3-a_4\cdots$$

مثال ...

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdots$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = -\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}\cdots$$

* تعريف السلسلة المختلطة:

تعريف: نقول عن السلسلة إنها مختلطة إذا كان جزء من حدودها إشارته سالبة والجزء الآخر إشارته موجبة أي من الشكل ....

$$a_1+a_2+a_3-a_4-a_5-a_6+a_7\cdots$$

مثال ..

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$$

* تعريف التقارب بإطلاق:

لله نقول عن المتسلسلة المتناوبة أو المختلطة $\sum a_n$ إنها متقاربة بإطلاق إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ القيمة المطلقة لها متقاربة

مثال 1:

ادرس تقارب هذه المتسلسلة:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ تقاربها

$\Rightarrow \sum \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right|$

- نلاحظ أنها ريمانية $p=2>1$ فهي متقاربة

إذاً المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ متقاربة بإطلاق.

مثال 2:

$$\left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة ، $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ متقاربة

إذاً المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ متقاربة بإطلاق

تعريف التقارب الشرطي:

لله نقول عن المتسلسلة المتناوبة أو المختلطة $\sum a_n$ إنها متقاربة "شرطياً" إذا كانت متسلسلة القيمة المطلقة لا متقاربة، وكانت المتسلسلة ذاتها $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة

(معيار لا بنز: إذا كانت نهاية الحد العام لا تسعى إلى الصفر عندئذ المتسلسلة متباعدة (متسلسلة عادية)

ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

((إذا كانت النهاية لا تسعى للصفر أنها متباعدة إذا كانت تسعى للصفر فإن نطبق المعيار الصفري))

$$\lim \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} = \begin{cases} -1 & : n \text{ فردي} \\ +1 & : n \text{ زوجي} \end{cases}$$

- إذا حسب المعيار الصفري المتسلسلة متباعدة

(شرط معيار لايبنز أن تكون المتسلسلة متناوبة وليست مختلطة)

مثال:

ادرس تقارب المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|$$

متسلسلة ريمانية توافقية $p=1$ متباعدة

1) نطبق معيار لايبنز

1) $\frac{1}{n} \geq 0 \; ; \forall n \in N$

2) $\{\frac{1}{n}\}$ متناقصة ; $f(x)=\frac{1}{x}$

$f'(n) = -\frac{1}{x^2} < 0 \; ; [1,+\infty[$

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ متقاربة

- ندعو التقارب تقارب شرطي

ادرس تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left|(-1)\frac{\ln n}{n}\right| = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$$

$n \geq 3 : \frac{1}{n} \leq \frac{\ln n}{n}$

- $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة ريمانية توافقية $(p=1)$

$\Leftarrow \sum_{n=1}\frac{\ln n}{n}$ متباعدة حسب معيار المقارنة

نطبق شروط لايبنز: المتسلسلة المتناوبة

1) $\frac{\ln n}{n} \geq 0$

2) $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}_{n\in N}$ متناقصة

$\Rightarrow f(n) = \frac{\ln x}{x}$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} < 0 ; x \geq 3$

متناقصة

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$

المتسلسلة متقاربة وندعو هذا التقارب تقارب شرطي

(إذا كانت متسلسلة بالقيمة المطلقة متباعدة يجب العودة للمتسلسلة الأصلية)

* معيار كوشيا التجميعي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

$a_n \geq 0$

$\{a_n\}_{n\in N}$ متناقصة

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ حيث $p>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k\cdot\frac{1}{(2^k)^p}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2^k\cdot\frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k\cdot 2^{-kp}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-p)k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{1-p}\right)^k$$

هندسية تكون متقاربة إذا كان:

$|2^{1-p}| < 1 \Longleftrightarrow 2^{1-p} < 1$

$\frac{1}{2^{p-1}} < 1 \Longleftrightarrow 1 < 2^{p-1}$

$\Longrightarrow p-1 > 0$

$\Longrightarrow p > 1$

المعيار الصفري

- إذا كانت المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة فإن

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

* أثبت أن $\lim_{n\to\infty} n\cdot a^n = 0$ حيث $|a|<1$

الحل

نشكل متسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a^n$

- نطبق دالمبير $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)a^{n+1}}{n\cdot a^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}|a| = |a| < 1$$

3