الفصل الأول: التقريبات باستخدام المربعات الصغرى

مفهوم التقريب: هو اختيار التابع الذي قد يكون حدودية أو أسياً أو لوغرتمياً بحيث قد يمر هذا التابع من النقاط المعطاة وقد لا يمر من نقاط أخرى و لكن بشرط أن يكون الخطأ المرتكب أصغر ما يمكن.

الهدف: هو إيجاد الثوابت التي تجعل قيمة الخطأ المرتكب أصغر ما يمكن.

أنواع التقريبات:
1) التقريبات الخطية (بالنسبة للثوابت)

مثال: $\phi(x, c_0, c_1, c_2) = c_0 + c_1 e^{2x} + c_2 \ln x$

2) التقريبات غير الخطية (بالنسبة للثوابت)

مثال: $\phi(x, c_0, c_1, c_2, c_3, c_4) = c_0 \cosh(c_1 x) + c_2 e^{-c_3(x-c_4)}$

التقريبات الخطية:
1) لبيانات متقطعة.
2) لبيانات مستمرة.

1) **التقريب الخطي لبيانات متقطعة:** (مجموعة نقاط)
هدفنا إيجاد الثوابت التي تجعل الخطأ أصغر ما يمكن
بالتالي فإن جملة المعادلات الخطية:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \sum_{i=0}^{N} w_i \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) = \sum_{i=0}^{N} w_i f(x_i)\varphi_j(x_i)$$

حيث N عدد النقاط المعطاة.

وتصبح بالشكل المصفوفي: $G.C = a$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{pmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{pmatrix}}_{a}$$

حيث:
$$(\varphi_j, \varphi_k) = \sum_{i=0}^{N} w_i \varphi_j(x_i) \cdot \varphi_k(x_i)$$
$$(f, \varphi_j) = \sum_{i=0}^{N} w_i f(x_i) \varphi_j(x_i)$$

وحيث w_i يدعى بتابع **الوزن** ويختلف من تابع لتابع ويحقق الشروط التالية:
1) w تابع مستمر
2) $w(x) > 0$ ضمن مجال معطى (يعرف ذلك بدراسة متغيراته)
3) $\forall n \in N, x \in]a,b[: \int_a^b w(x)|x|^n dx < \infty$
قيمة التكامل محدودة.

بعض أنواع التقريبات: 1- تقريب بالحدوديات الجبرية.

عندها $w_i = 1$ و $\varphi_k(x_i) = x_i^k$

نضع جملة معادلات بشكل المصفوفة كالآتي:

عدد النقاط

$$\begin{pmatrix} (N+1) & \sum x_i & \cdots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^{n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \cdots & \sum x_i^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f(x_i) \\ \sum x_i f(x_i) \\ \sum x_i^2 f(x_i) \\ \vdots \\ \sum x_i^n f(x_i) \end{pmatrix}$$

وقيم نقاط المعطاة.

حالات خاصة: 1) $n = 1$ **تقريب البيانات إلى مستقيم** أو تقريب باستخدام تابع خطي

عندها تكون دالة تقريب من شكل:
$$\phi(x) = c_1 x + c_0$$

ولإيجاد ثوابت نحل جملة المعادلتين:

$$\begin{pmatrix} N+1 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f(x_i) \\ \sum x_i f(x_i) \end{pmatrix}$$

$(N+1)c_0 + (\sum x_i)c_1 = \sum f(x_i)$ --- (1)

$(\sum x_i)c_0 + (\sum x_i^2)c_1 = \sum x_i f(x_i)$ --- (2)

اقرأ ص 22 ---- ص 26 مع الانتباه لتصحيح أخطاء

2) $n=2$ تقريب إلى قطع مكافئ أو تقريب باستخدام تابع من الدرجة الثانية.

عندها معادلة التقريب لها الشكل،

$$\phi(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

وتصبح شكل المصفوفة كالتالي:

$$\begin{pmatrix} N+1 & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f(x_i) \\ \sum x_i f(x_i) \\ \sum x_i^2 f(x_i) \end{pmatrix}$$

للوصول على الثوابت نحل جملة 3 معادلات بـ 3 مجاهيل

$$(N+1)c_0 + \left(\sum x_i\right)c_1 + \left(\sum x_i^2\right)c_2 = \sum f(x_i) \quad (1)$$

$$\left(\sum x_i\right)c_0 + \left(\sum x_i^2\right)c_1 + \left(\sum x_i^3\right)c_2 = \sum x_i f(x_i) \quad (2)$$

$$\left(\sum x_i^2\right)c_0 + \left(\sum x_i^3\right)c_1 + \left(\sum x_i^4\right)c_2 = \sum x_i^2 f(x_i) \quad (3)$$

لاحظ مثال (4) ص 27+28

* قد يأتي إيجاد معادلة التقريب باستخدام تابع من درجة الثالثة وما فوق. وكتابته بشكل مصفوفي.

مثال 5 ص 29 طلب تقريب باستخدام تابع من درجة ثالثة أي $\phi(x)=c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0$ فتكون أبعاد مصفوفة G هي 4×4 أي من الشكل:

$$\begin{pmatrix} N+1 & \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 & \sum x_i^6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f(x_i) \\ \sum x_i f(x_i) \\ \sum x_i^2 f(x_i) \\ \sum x_i^3 f(x_i) \end{pmatrix}$$

وهكذا...

-2- التقريب باستخدام الحدوديات المتعامدة:

في هذه الحالة تكون المصفوفة G مصفوفة قطرية أي جميع عناصرها عدا القطر الرئيسي أصفار

وعليه لحساب ثوابت في هذه الحالة:

$$c_j = \frac{(f, \varphi_j)}{(\varphi_j, \varphi_j)}$$

حيث:

$$(\varphi_j, \varphi_j) = \sum_{i=0}^{N} w_i \varphi_j^2(x_i)$$

$$(f, \varphi_j) = \sum_{i=0}^{N} w_i f(x_i) \cdot \varphi_j(x_i)$$

2) التقريب الخطي لبيانات مستمرة، (على مجال)

بالتالي فإن جملة معادلات خطية لها الشكل:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \int_a^b w(x) \cdot \varphi_j(x) \cdot \varphi_k(x) \cdot dx = \int_a^b w(x) \cdot f(x) \cdot \varphi_j(x) \cdot dx$$

حيث:

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_a^b w(x) \cdot \varphi_j(x) \cdot \varphi_k(x) \cdot dx$$

$$(f, \varphi_j) = \int_a^b w(x) \cdot f(x) \cdot \varphi_j(x) \cdot dx$$

وعندها تصبح الجملة بشكل المصفوفي كالتالي:

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ (f, \varphi_n) \end{pmatrix}$$

أنواع التقريبات: -1- التقريب بالحدوديات الجبرية

حيث: $w(x)=1$ و $\varphi_k(x_i)=x_i^k$

وبالتالي تصبح جملة معادلات الجملة بشكل مصفوفي كالآتي:

$$\begin{pmatrix} \int_a^b 1\,dx & \int_a^b x\,dx & \cdots & \int_a^b x^n dx \\ \int_a^b x\,dx & \int_a^b x^2\,dx & \cdots & \int_a^b x^{n+1}dx \\ \vdots & & & \vdots \\ \int_a^b x^n & \int_a^b x^{n+1}dx & \cdots & \int_a^b x^{2n}dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b f(x) \\ \vdots \\ \int_a^b x^n f(x) \end{pmatrix}$$

حالة خاصة: $n=2$

التقريب باستخدام تابع من درجة الثانية أي

$$\phi(x)=c_2x^2+c_1x+c_0$$

لإيجاد ثوابت نحل جملة 3 معادلات بـ 3 مجاهيل:

$$\begin{pmatrix} \int_a^b 1\,dx & \int_a^b x\,dx & \int_a^b x^2\,dx \\ \int_a^b x\,dx & \int_a^b x^2\,dx & \int_a^b x^3\,dx \\ \int_a^b x^2\,dx & \int_a^b x^3\,dx & \int_a^b x^4\,dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b f(x)\,dx \\ \int_a^b x f(x) \\ \int_a^b x^2 f(x) \end{pmatrix}$$

أقرأ التمارين ص 38 ـــ ص 44.

-2- التقريب بالحدوديات المتعامدة:

تكون عندها في هذه الحالة المصفوفة G قطرية

أي: $(\varphi_j,\varphi_k)=0$ ، $j\neq k$

$(\varphi_j,\varphi_k)=\int_a^b w(x)\,\varphi_j^2(x)\,dx$ ، $j=k$

وعليه حساب ثوابت:

$$c_j=\frac{(f,\varphi_j)}{(\varphi_j,\varphi_j)}$$

حيث: $(f,\varphi_j)=\int_a^b w(x)\,f(x)\,\varphi_j(x)\,dx$

$(\varphi_j,\varphi_j)=\int_a^b w(x)\,\varphi_j^2(x)\,dx$

أشهر الحدوديات المتعامدة:

1) ليجندر: معرفة على مجال]-1,1[، تابع الوزن لها $w(x)=1$.

2) تشيبيشيف: معرفة على مجال]-1,1[، تابع الوزن لها $w(x)=(1-x^2)$.

3) لاكير: معرفة على مجال]0,∞[، تابع الوزن لها e^{-x}

4) هرميت: معرفة على مجال]-∞,∞[، تابع الوزن لها e^{-x^2}.

-1- حدوديات ليجندر: هي حدوديات متعامدة على المجال]-1,1[بالنسبة لتابع الوزن $w(x)=1$ وتعطى العلاقة تكرارية لها بالشكل:

$$P_{k+1}(x)=\frac{1}{k+1}\left[(2k+1)\,x\,P_k(x)-(k)\,P_{k-1}(x)\right]$$

وبشكل خاص: $P_0(x)=1$ و $P_1(x)=x$

* التقريب باستخدام حدوديات لوجندر، أي إيجاد الثوابت في معادلة التالية بحيث يكون الخطأ أصغر ما يمكن: $\phi(x)=c_0P_0(x)+c_1P_1(x)+\dots+c_nP_n(x)$

لحساب الثوابت نطبق القانون التالي:

$$c_j=\frac{\int_{-1}^{1} f(x)\cdot P_j(x)\,dx}{\int_{-1}^{1} P_j(x)\cdot P_j(x)\,dx}$$

حيث:

$$\int_{-1}^{1} P_j(x)\cdot P_j(x)\,dx=\frac{2}{2j+1}$$

كل حدود قطر رئيسي في G وباقي العناصر أصفار، لأن G تكون قطرية في حدوديات متعامدة

* جميع التكاملات نحل بالآلة الحاسبة

/ /

لوزن الدالة ليست معرفة على مجال $[-1,1]$ بل على مجال $[a,b]$ فإننا نحول المجال $[a,b]$ إلى المجال $[-1,1]$ باستخدام القانون التالي

$$x = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}$$

لاحظ مثال 10 ص53

واقرأ التمارين ص49 ـــ ص55 مع الانتباه للتصحيح.

-2- حدودية هرميت: دكتورة قالت مطلوبة مع العلم أنه لا يوجد تمارين عليها وما يصعب إيجاد التكامل لانه على مجال $]-\infty,\infty[$ أي هنا تكامل معتل من طرفين.

هي حدوديات متعامدة على مجال $]-\infty,\infty[$ بالنسبة لتابع الوزن $w(x)=e^{-x^2}$ وتعطى العلاقة التكرارية بالشكل:

$$H_{k+1}(x) = 2x\,H_k(x) - 2k\,H_{k-1}(x) \quad ; k=1,2,\dots$$

وبشكل خاص: $H_0(x)=1$, $H_1(x)=2x$

$$\Rightarrow c_j = \frac{(f, H_j)}{(H_j, H_j)}$$

حيث: $(f, H_j) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,.\,H_j(x)\,.\,dx$

$$(H_j, H_j) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_j^2(x)\,.\,dx = j!\; 2^j \sqrt{\pi}$$

وحدودية التقريب باستخدام هرميت تأخذ الشكل:

$$\phi(x) = c_0 H_0(x) + c_1 H_1(x) + \dots + c_n H_n(x)$$

-3- حدودية لاكير: أيضاً مثلها مثل حدودية هرميت لم تعطيها دكتورة وقالت إنها مطلوبة ومن الصعب إيجاد تكامل لانها معرفة على $]0,\infty[$ هناك تمرين (11) ص61 على هذه الحدودية.

هي حدودية متعامدة على المجال $]0,\infty[$ بالنسبة لتابع الوزن $w(x) = e^{-x}$ وتعطى العلاقة التكرارية بالشكل:

$$L_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1}\left[(2k+1-x)L_k(x) - k\,L_{k-1}(x)\right]$$

بشكل خاص: $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$

$$\Rightarrow c_j = \frac{(f, L_j)}{(L_j, L_j)}$$

حيث: $(f, L_j) = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x)\,.\,L_j(x)\,.\,dx$

$$(L_j, L_j) = \int_0^{\infty} e^{-x} L_j(x)\,.\,L_j(x) = 1$$

وحدودية التقريب باستخدام لاكير تأخذ الشكل:

$$\phi(x) = c_0 L_0(x) + c_1 L_1(x) + \dots + c_n L_n(x)$$

-4- حدوديات تشبتشيف: وهي حدوديات متعامدة على المجال $]-1,1[$ بالنسبة لتابع الوزن:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

وتعطى العلاقة التكرارية بالشكل:

$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad : n \geq 1$$

بشكل خاص: $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$

وحدودية التقريب باستخدام تشبتشيف تأخذ الشكل:

$$\phi(x) = c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + \dots + c_n T_n(x)$$

تعريف: حدوديات تشيبيشيف واحدية المعامل الرئيسي

هي الحدوديات التي تنتج عن حدوديات تشيبيشيف بتقسيم $T_n(x)$ على المعامل الرئيسي 2^{n-1} ومنه

$$\tilde{T}_0(x)=1$$

$$\tilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) \quad , n\geq 1$$

وتصبح العلاقة التكرارية:

$$\tilde{T}_{n+1}(x)=x\,\tilde{T}_n(x)-\frac{1}{4}\tilde{T}_{n-1}(x) \quad , n\geq 2$$

* إن حدودية تشيبيشيف $T_n(x)$ من الدرجة $n\geq 1$ لها n صفراً بسيطاً على المجال $[-1,1]$ عند النقاط:

$$x_k=\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad , \forall k=1,\dots,n$$

أصفار الحدودية $T_n(x)$.

وتبلغ $T_n(x)$ قيمتها العظمى بالقيمة المطلقة عند النقاط:

$$x'_k=\cos\left(\frac{k}{n}\pi\right) \quad \forall k=1,\dots,n-1$$

أي: $T_n(x'_k)=(-1)^k$

وبما أن $\tilde{T}_n(x)$ من مضاعفات $T_n(x)$ فإن أصفار $\tilde{T}_n(x)$ هي نفسها أصفار $T_n(x)$ وهي.

$$\bar{x}_k=\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad \forall k=1,\dots,n$$

كما أن القيمة العظمى لـ $\tilde{T}_n(x)$ عند نقاط:

$$\bar{x}'_k=\cos\left(\frac{k}{n}\pi\right) \quad ; \forall k=1,\dots,n-1$$

أي:

$$\tilde{T}_n(\bar{x}'_k)=\frac{(-1)^k}{2^{n-1}}$$

علاقة حدودية تشيبيشيف واحدية معامل مع أي حدودية من نفس درجة. الحدوديات $\tilde{T}_n(x)$ حيث $n\geq 1$ تتمتع بالخاصة التالية:

$$\frac{1}{2^{n-1}}=\max_{-1\leq x\leq 1}|\tilde{T}_n(x)|\leq \max_{-1\leq x\leq 1}|P_n(x)|$$

أصغر الحدودية

المهم في حدوديات تشيبيشيف هو تقليل الخطأ المرتكب باستخدام أصفار تشيبيشيف.

$$\max Error=|f(x)-P_n(x)| \leq \max\left|\frac{f^{(n+1)}(x)\cdot P^*_{n+1}(x)}{(n+1)!}\right|$$

لكن إذا أخذنا أصفار تشيبيشيف التي هي نفس أصفار تشيبيشيف الواحدية عندئذ سيكون حسب الخاصة السابقة $\tilde{T}_{n+1}(x)=P^*_{n+1}(x)$ ومنه:

$$\max|\tilde{T}_{n+1}(x)|=\frac{1}{2^{(n+1)-1}}=\frac{1}{2^n}$$

$$\star \Rightarrow \boxed{\max Error \leq \frac{\max|f^{(n+1)}(x)|}{2^n(n+1)!}}$$

العلاقة * تفيد في حل تمارين.

* لو أن الدالة ليست معرفة على مجال $[-1,1]$ بل على المجال $[a,b]$ فإننا نحول المجال $[a,b]$ إلى المجال $[-1,1]$ باستخدام القانون التالي.

$$\tilde{x}_k=\frac{1}{2}\left[(b-a)x_k+(b+a)\right]$$

سنحل تمارين متنوعة على هذه الحدودية.

مثال حول: باستخدام أصفار تشيبيشيف قدر الخطأ المرتكب حيث أن حدودية الاستيفاء هي من درجة (2) لتابع $f(x)=\sin\pi x$ على المجال $[-1,1]$.

$$x_k=\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right) \quad ; k=0,1,2$$

$$x_0=\cos\left(\frac{\pi}{2(2)+2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1=\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right)=0$$

$$x_2=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

أصفار $\tilde{T}_2(x)$

تقدير الخطأ: $E_{max}\leq \max\left|\frac{f^{(3)}(x)\cdot\tilde{T}_3(x)}{3!}\right|$

$$\leq \frac{\max|f^{(3)}(x)|}{2^2(3)!}=\frac{\pi^3}{4(3)!}$$

$f'=\pi\cos\pi x$

$f''=-\pi^2\sin\pi x$

$f'''=-\pi^3\cos\pi x$

$$\leq \frac{\pi^3}{24}$$

$\max|\cos\pi x|=1$ ومنه $\max|f'''|=\pi^3$

Scanned by CamScanner

مثال ص 68 : استخدم أصفار تشبيشيف لتقدير الخطأ المرتكب حيث أن صورية الاستيفاء من الدرجة الثالثة لتابع $f(x) = xe^x$ على مجال $[\overset{a}{0}, \overset{b}{1.5}]$

أولاً نجري تحويل: $[0, 1.5] \longrightarrow [-1, 1]$

باستخدام القانون التالي:

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{2}\left[(b-a)\,x_k + (b+a)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1.5)\,x_k + (1.5)\right]$$

$$= 0.75\,x_k + 0.75$$

نطلب x_k باستخدام القانون:

$$\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right) \quad ; \; k = 0, 1, 2, 3$$

ولدينا $n = 3$.

$$\Rightarrow x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0.92387$$
$$x_1 = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 0.38268$$
$$x_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -0.38268$$
$$x_3 = \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -0.92387$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_0 = 1.4429$$
$$\tilde{x}_1 = 1.03701$$
$$\tilde{x}_2 = 0.46299$$
$$\tilde{x}_3 = 0.05709$$

وعليه: $n = 3$

$$E_{max} \leq \max\left|\frac{f^{(n+1)}(x) \cdot \tilde{T}_{n+1}(x)}{(n+1)!}\right|$$

$$\leq \frac{\max|f^{(n+1)}(x)|}{2^3\,(4)!}$$

$$\leq 0.021821$$

$f' = e^x + xe^x$

$f'' = 2e^x + xe^x$

$f''' = 3e^x + xe^x$

$f^{(4)} = 4e^x + xe^x$

$\max f^{4} =$

$f^{(4)}(1) - f^{(4)}(-1)$

$= 4.18979$

بالنسبة لحساب الخطأ المرتكب والنسبي:

أ- في حال التقريب لبيانات متقطعة:

$$E = |\varphi - T|$$

دالة تقريب

دالة أصلية

باستخدام نظيم الناظم:

$$E = \sqrt{\sum_{i=0}^{n}\left(\varphi(x_i) - y_i\right)^2} \quad -- *$$

هذا الخطأ المرتكب بينما الخطأ النسبي

$$R = \frac{E}{T}$$

حيث E من علاقة (*) و

$$T = \sqrt{\sum_{i=0}^{n}(y_i^2)}$$

ب- في حال التقريب لبيانات مستمرة:

$$E = \sqrt{\int_a^b \left(\varphi(x) - f(x)\right)^2} \quad -- **$$

هذا الخطأ المرتكب بينما الخطأ النسبي

$$R = \frac{E}{T}$$

حيث E من علاقة ** و

$$T = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 \cdot dx}$$

2) التقريب غير الخطي:

أ- التقريب بتابع أسي من الشكل be^{ax}:

يمكن تحويلها إلى تقريب خطي لبيانات متقطعة.

$$y = be^{ax} \Rightarrow \ln y = \ln b + ax$$
$$\Rightarrow Y = AX + B$$

مهمتنا أصبح البحث عن A و B

و نشكل المصفوفي للمعادلات بالشكل:

$$\begin{pmatrix} N+1 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \ln y_i \\ \sum x_i \ln y_i \end{pmatrix}$$

والخطأ يحسب بالقانون:

$$E = \sum_{i=0}^{N} [y_i - be^{ax_i}]^2$$

ب- التقريب بتابع قوة من الشكل bx^a:

$$y = bx^a \Rightarrow \ln y = \ln b + a \ln x$$
$$\Rightarrow Y = AX + B$$

مهمتنا أصبح البحث عن A و B وشكل المصفوفي للمعادلات بالشكل:

$$\begin{pmatrix} \underset{\text{عدد النقاط}}{N+1} & \sum \ln x_i \\ \sum \ln x_i & \sum (\ln x_i)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \ln y_i \\ \sum (\ln x_i)(\ln y_i) \end{pmatrix}$$

و الخطأ يحسب بالقانون: عدد النقاط

$$E = \sum_{i=0}^{N} [y_i - bx^a]^2$$

أقرأ ص 77 __ ص 84

انتهى

الفصل

الأول

هلأ

تمارين الفصل

من ص 89 __ ص 93

بالتوفيق

Reem

Al-Rahabi

الفصل الثاني: الحل العددي لجملة المعادلات الخطية.

بفرض أنه لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

والتي لها شكل المصفوفي:

$$AX = b \quad --- (*)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

مراجعة في مفاهيم بالمصفوفات:

1) يقال عن المصفوفة $A \in M_n^{n\times n}(\mathbb{R})$ إنها شاذة إذا كان $\det(A) = 0$ وإنها غير شاذة إذا كان $\det A \neq 0$

2) يقال عن المصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$ إنها متناظرة إذا كان $A = A^T$ حيث A^T منقول المصفوفة A.

3) يقال عن المصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$ إنها واحدية إذا كان:
$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & ; i \neq j \\ 1 & ; i = j \end{cases}$$
ويرمز لها بـ I_n

4) يقال عن المصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$ إنها قطرية إذا كان: $a_{ij} = 0 \quad ; i \neq j$

5) يقال عن المصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$ إنها مثلثية عليا إذا كان $a_{ij} = 0$ حيث $i > j$ ويرمز لها بـ U
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

6) يقال عن المصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$ إنها مثلثية دنيا إذا كان $a_{ij} = 0$ حيث $i < j$ ويرمز لها بـ L
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7) يقال عن المصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$ إنها مسيطرة قطرياً إذا كان: $i = 1, \dots, n$; $|a_{ij}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$

8) يقال عن المصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$ إنها مسيطرة قطرياً تماماً إذا كان: $i = 1, \dots, n$; $|a_{ij}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$

أقرأ أمثلة (3) ص 98

9) يقال عن المصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$ إنها معرفة إيجابياً إذا كانت: 1) متناظرة. 2) إذا كان $x^T A x > 0$ وذلك من أجل كل n وكل شعاع $x \neq 0$. أقرأ مثال 4 ص 98 + ص 99

مبرهنة:
بفرض $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة معرفة إيجابياً عندئذ:
1) A قابلة للقلب.
2) جميع عناصر القطر الرئيسي موجبة تماماً.

10) بفرض $A \in M_n(\mathbb{R})$ نسمي مجموعة قيم λ التي تحقق المعادلة $Ax = \lambda x \ , \ x \neq 0$ بالقيم الذاتية الموافقة للمصفوفة A أو طيف المصفوفة A.
ونسمي الشعاع x بالشعاع الذاتي الموافق للقيمة الذاتية λ.

ملاحظة: يوجد للمعادلة $Ax = \lambda x \ , \ x \neq 0$ حل غير صفري إذا كان $\det(A - \lambda I) = 0$ وتدعى بالمعادلة المميزة للمصفوفة A.

11) بفرض $A \in M_n(R)$ نسمي العدد

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \; ; \; Ax = \lambda x, x \neq 0\}$$

ويدعى بنصف القطر الطيفي.

أقرأ مثال (5) ص 100، ص 101.

مبرهنة: إن حل الجملة $Ax = b$ موجود ووحيد إذا كانت مصفوفة أمثال غير شاذة أي $\det(A) \neq 0$

مبرهنة جيرشغورين: لتكن λ قيمة ذاتية للمصفوفة المربعة $A \in M_n(R)$ عندئذ من أجل أي عدد صحيح $1 \le j \le n$ يتحقق أن:

$$|a_{jj} - \lambda| \le \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}|$$

ملاحظة: بفرض $d_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}|$ حيث $1 \le j \le n$ نسمي مجموعة الأقراص $D_j(a_{jj}, d_j) \; ; \; 1 \le j \le n$ بأقراص جيرشغورين.

أقرأ مثال (6) ص 102

12) نظيم شعاع: يعرف نظيم شعاع بأنه التطبيق: $\|\cdot\| : R^n \longrightarrow R^+ = [0, +\infty[$

الذي يحقق الشروط التالية:

1. $\|x\| > 0$ if $x \neq 0$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\|cx\| = |c| . \|x\|$
4. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

أمثلة على نظائم الأشعة:

1) نظيم القيمة المطلقة أو l_1:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

2) نظيم الإقليدي أو l_2:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

3) نظيم الـ max أو l_∞:

$$\|x\|_\infty = \max_{0 \le i \le n} |x_i|$$

أقرأ مثال 8 ص 105

13) يعرف نظيم مصفوفة بأنه التطبيق:

$$\|\cdot\| : M_{m \times n}(R) \longrightarrow R^+ = [0, \infty[$$

الذي يحقق الشروط التالية:

1. $\|A\| > 0$ if $A \neq 0$
2. $\|cA\| = |c| \|A\|$
3. $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$

أمثلة عن نظائم مصفوفة:

1) النظيم الإقليدي لمصفوفة (أو نظيم

$$F(A) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

2) النظائم المرتبة جزئياً لمصفوفة:

$$\|A\|_1 = \max_k \sum_i |a_{ik}|$$

أعظم قيمة لمجموع الأعمدة بالقيمة المطلقة

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_i \{|\lambda_i|\}} \quad ; \lambda_i \in \lambda(A^T . A)$$

حالة خاصة إذا كان $A = A^T$ حيث A مصفوفة متناظرة

$$\Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A)^2} = \rho(A)$$

أعظم قيمة ذاتية للمصفوفة

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum |a_{ik}|$$

أعظم قيمة لمجموع الأسطر.

أقرأ مثال (9) ص 106.

14) العدد الشرطي لمصفوفة:

بفرض A مصفوفة مربعة وقابلة للقلب ($\det(A) \neq 0$)

عندئذ نعرف العدد الشرطي لهذه مصفوفة على أنه:

$$\mathrm{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

حيث $\|\cdot\|$ نظيم مرتب جزئياً للمصفوفة A.

* يختلف العدد الشرطي من مسألة لمسألة

15) الجملة المريضة والجملة الجيدة:

يقال عن جملة معادلات الخطية $Ax = b$ إنها مريضة إذا كان العدد الشرطي لمصفوفة أمثالها كبير نسبياً

وإذا كان صغير نسبياً يقال عن الجملة إنها جيدة.

★ غالباً ما تعتبر الجملة جيدة إذا كان $cond(A) << 1$ أو قريبة من الواحد وخلاف ذلك تكون جملة مريضة

لمعرفة جملة أهي مريضة أو جيدة حسب أمثال المصفوفة قبل إدخالها الحاسوب.

مع الملاحظة: أنه ليس كل ما يدخل إلى الحاسوب جيد فإذا كان العدد الشرطي صغير فليس من ضروري أن تكون المسألة حل أو مستقلة بينما لو كبير غير معروف ولا يصلح إدخالها للحاسوب.

أقرأ مثال 10 ص103 ، ص105

طرائق حل جملة المعادلات الخطية:

- طرائق المباشرة
  - طريقة غاوس المحسنة
  - طريقة جوردان
  - تقنية مركز الجزئي
  - تقنية مركز الدرجي
  - طرائق LU
    - طريقة كروات
    - طريقة دوليتل
    - طريقة تشوليسكي
- الطرائق التكرارية
  - طريقة جاكوبي
  - طريقة غاوس سيدل
  - طريقة S.O.R

الطرائق المباشرة لحل جملة معادلات الخطية:

نفرض أنه لدينا جملة المعادلات الخطية $Ax = b$ حيث $det(A) \neq 0$

أولاً: طريقة غاوس المحسنة:

نتبع الخطوات التالية:

1) توسيع مصفوفة الأمثال A وذلك بإضافة عمود الثوابت إلى هذه المصفوفة بالشكل:

$$\tilde{A} = (A \vdots b)$$

حيث A مصفوفة الأمثال و b مصفوفة الثوابت.

2) تحول المصفوفة A ضمن مصفوفة $\tilde{A}$ الموسعة إلى مصفوفة مثلثية عليا وذلك بجعل العناصر التي تحت القطر الرئيسي لـ A أصفار وذلك باستخدام تحويلات السطرية.

تذكرة بتحويلات السطرية:

1. المبادلة بين سطرين من أسطر المصفوفة $R_i \leftrightarrow R_j$

2. ضرب جميع عناصر أحد الأسطر بعدد لا يساوي الصفر أي: $\alpha \neq 0$; αR_j

3. إضافة أحد الأسطر إلى سطر آخر بعد ضربه بعدد ما لا يساوي الصفر أي $\alpha \neq 0$; $\alpha R_i \mp R_j$

عندها بعد تطبيق (1) + (2) تتحول المصفوفة

$$\tilde{A}(A|b) \longrightarrow (U|C)$$

(3) نحل جملة الناتجة باستخدام طريقة تعويضات المتتالية التراجعية.

أقرأ مثال 12 ص114 .

أصداء وطريقة غاوس المعدلة:

لا يمكن تطبيقها بشكل مباشر عندما يكون أحد عناصر القطر رئيسي صفر.

ملاحظة: إذا كان أحد عناصر القطر رئيسي مساوي للصفر فنقوم بإعادة ترتيب الأسطر بحيث نجعل جميع عناصر القطر الرئيسي غير مساوية للصفر ومن ثم نطبق غاوس

أقرأ ص117

ثانياً: طريقة غاوس جوردان:

نتبع الخطوات التالية:

1) تكوين مصفوفة الأمثال

$$\tilde{A} = (\overset{I}{A} , \overset{II}{b})$$

حيث A مصفوفة الأمثال و b عامود الثوابت.

2) تحول الجزء I من المصفوفة الموسعة $\tilde{A}$ إلى مصفوفة قطرية وذلك بجعل العناصر التي تحت القطر الرئيسي لـ A أصفاراً وذلك باستخدام تحويلات السطرية.

ونجعل العناصر التي فوق القطر الرئيسي لـ A أصفاراً وذلك باستخدام تحويلات السطرية.

عندها بتطبيق (1) + (2) تتحول المصفوفة

$$(A|b) \longrightarrow (U|C)$$

3) حل الجملة الناتجة.

أقرأ أمثال 14 ص118 + ص119

ثالثاً: تقنيات المركز الجزئي: عندما يكون عنصر الرائد أي كل عامود صغير نسبياً بالنسبة لبقية عناصر عامودة

نتبع الخطوات التالية:

1) نختار أكبر عنصر (بالقيمة المطلقة) من العناصر الواقعة تحت العنصر الرائد لمصفوفة موسعة موافقة لجملة معادلات الخطية أي: $|a_{kl}| = \max_{k \le j \le n} |a_{jk}|$

حيث k رقم سطر العنصر الرائد، n عدد أسطر المصفوفة الموسعة.

2) نبدل السطر (1) والسطر (k) أي $R_1 \leftrightarrow R_k$

3) نطبق طريقة غاوس المعدلة على المصفوفة الناتجة عن التحويل.

أقرأ الأمثلة ص120 + ص121 + ص122

رابعاً: تقنيات المركز الجزئي الدرجي:

نفرض أنه لدينا جملة المعادلات الخطية $AX=b$ ندعى $\tilde{A}=(A|b)$ المصفوفة الموسعة الموافقة لهذه الجملة التي عدد أسطرها n تقوم تقنية المركز الجزئي الدرجي على تطبيق الخطوات التالية وذلك من أجل $j=1,2,\dots,n-1$

1. نوجد المجموعة: $\{S_i ; S_i = \max_{j \le k \le n}\{|a_{ik}|\}\}$ أكبر عنصر من السطر بالقيمة المطلقة.

2. نوجد $\max_{j \le i \le n}\left\{\frac{|a_{ij}|}{S_i}\right\}$

العامود الأول نقسمه على S_1 ثم العامود الثاني نقسمه على S_2 وهكذا ثم نقارن لنرى أكبر عنصر العنصر الناتج يكون

ومنه: $\exists w \in \mathbb{Z}^+ ; \max_{j \le i \le n}\left\{\frac{|a_{ij}|}{S_i}\right\} = \frac{|a_{wj}|}{S_w}$

3. نجري التحويل $R_j \leftrightarrow R_w$

4. نطبق طريقة غاوس المعدلة على المصفوفة الناتجة عن التحويل.

أقرأ أمثال ~~[illegible]~~ ص123 + ... + ص126.

خامساً: طرائق LU:

نبحث تفريق مصفوفة الأمثال A إلى مصفوفة مثلثية عليا L ومصفوفة مثلثية دنيا U.

① $AX=b$

② $A=LU$ * حسب ترتيب معادلات

③ $L(UX)=b$ بالنسبة للمجاهيل مهم جداً

④ $UX=Y$ نعرض

⑤ $LY=b$

⑥ نعوض Y في معادلة ④

$A = LU$ كروات، دوليتل، تشوليسكي

كروات:

$$L = \begin{pmatrix} \underline{l_{11}} & 0 & 0 \\ \underline{l_{21}} & \underline{l_{22}} & 0 \\ \underline{l_{31}} & \underline{l_{32}} & \underline{l_{33}} \end{pmatrix}$$

و

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \underline{u_{12}} & \underline{u_{13}} \\ 0 & 1 & \underline{u_{23}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نحسب العناصر التي تحتها خط وفق

$$LU = A$$

نضرب مصفوفة L بالمصفوفة U ثم نساويها بالمصفوفة المعلومة A.

أقرأ مثال 16 ص129 -- ص131.

دوليتل:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \underline{l_{21}} & 1 & 0 \\ \underline{l_{31}} & \underline{l_{32}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \underline{u_{11}} & \underline{u_{12}} & \underline{u_{13}} \\ 0 & \underline{u_{21}} & \underline{u_{23}} \\ 0 & 0 & \underline{u_{33}} \end{pmatrix}$$

نحسب العناصر التي تحتها خط وفق:

$$LU = A$$

نضرب مصفوفة L بالمصفوفة U ثم نساويها بالمصفوفة المعلومة A.

أقرأ مثال 17 ص133 -- ص135

تشوليسكي، نفرض $U = L^T$

$$L = \begin{pmatrix} \underline{l_{11}} & 0 & 0 \\ \underline{l_{21}} & \underline{l_{22}} & 0 \\ \underline{l_{31}} & \underline{l_{32}} & \underline{l_{33}} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \underline{l_{11}} & \underline{l_{21}} & \underline{l_{31}} \\ 0 & \underline{l_{22}} & \underline{l_{32}} \\ 0 & 0 & \underline{l_{33}} \end{pmatrix}$$

نحسب العناصر التي تحتها خط وفق $L\underset{(L^T)}{U} = A$

نضرب مصفوفة L بالمصفوفة U ثم نساويها بالمصفوفة المعلومة A.

أقرأ مثال 18 ص137 -- ص139

ملاحظة: بالضرب نلاحظ أن

$$l_{11} \cdot l_{11} = a_{11} \Rightarrow l_{11}^2 = a_{11} \Rightarrow \underline{l_{11} = \sqrt{a_{11}}}$$

لـ نأخذ الجذر الموجب فقط.

الطرائق التكرارية:

1. طريقة جاكوبي
2. " غاوس سيدل
3. " S.O.R

* اعتمدت في بناء المتتاليات التكرارية الموافقة للطرائق العددية السابقة على مبدأ النقطة الثابتة

تذكرة (مبدأ النقطة الثابتة)

يقال أن للتابع g نقطة ثابتة α إذا تحقق أن $g(\alpha) = \alpha$

مثلاً: أوجد حلول المعادلة $f(x) = x - e^x$ بطريقة نقطة ثابتة.

أولاً: نشكل $x = g(x)$

$(*) — x = e^x$

ثانياً: هل $g(x)$ مناسبة؟ تكون $g(x)$ مناسبة إذا تحقق $\max|g'(x)|<1$

هنا نلاحظ

$\max|e^x| = |e^2| = e^2 > 1 \quad ; x \in [1.5, 2]$

لكون e^x تابع متزايد

وعليه فإن $g(x)$ هنا غير مناسبة.

لكن إذا أخذنا لوغارتم في $(*)$

$\Rightarrow x = \ln x$

$\max|(\ln x)'| = \frac{1}{x} = \frac{1}{1.5} < 1$

لكون $\frac{1}{x}$ تابع متناقص.

هنا $g(x) = \ln x$ مناسبة.

عندها نطبق ثالثاً: العلاقة التكرارية

$x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$

تذكرة (التابع التقلصي)

إذا كان $g: A \longrightarrow B$ تابع تقلصي

تابع تقلصي أي (...)

$\exists K: 0 \le K \le 1 \; ; \; \forall x, y \in D \subseteq A:$

$\|g(x) - g(y)\| \le K\|x - y\|$

إذا تحقق $\max|g'(x)| < 1$ فإنه يمكن بناء متتالية تكرارية تتقارب نحو الحل بالشكل

$x^{(n+1)} = g(x^{n})$ (الحل الوحيد)

ملاحظة: (مصفوفة مربعة)

بفرض أنه لدينا التابع $F: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$

إذا استطعنا كتابة $F(x) = Bx + C$

وإذا كان $\|B\|_1 < 1$ فيكون $F(x)$ تابع تقلصي

وبناءً على مبرهنة سابقة فإنه يمكن بناء متتالية متقاربة بالشكل

$\forall x^{(0)} \; , \; x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$

* بفرض أنه لدينا جملة من المعادلات الخطية

$① — AX = b \quad , \det(A) \neq 0$

لدراسة تقاربه:

نقوم بتفريق مصفوفة الأمثال بالشكل:

$② --- A = M - N \quad , \det(M) \neq 0$

نعوض (2) في (1)

$(M - N)X = b$

$MX = NX + b$

M عناصر قطر رئيسي في مصفوفة A

$X = \underbrace{M^{-1}N}_{B} X + \underbrace{M^{-1}b}_{C}$

بالاعتماد على مبرهنة قيمة الثابتة يمكن بناء متتالية تكرارية

$③ — X^{(k+1)} = \underbrace{M^{-1}N}_{B} X^{(k)} + \underbrace{M^{-1}b}_{C} \quad ; k \ge 0$

$\forall \underbrace{x^{(0)}}_{\text{قيمة ابتدائية}}$

/ /

ما يهمنا في دراسة تقارب هي المصفوفة B فقط وهي تختلف من طريقة إلى أخرى

التقارب حسب التعريف العام

الشرط اللازم والكافي لتقارب المتتالية العددية (3) الموافقة للطرائق المستخدمة في حل جملة المعادلات الخطية $AX = b$ حيث $\det(A) \neq 0$ نحو الحل الفعلي x هو أن يتحقق $\rho(B) < 1 \Leftrightarrow \|B\|_2 < 1$

أي العودة لتعريف نظيم مرتب تربيعاً الثاني للمصفوفة B.

وطريقة حساب قيم ذاتية من معادلة مميزة.

وإذا كان صعب إيجادها اللجوء إلى مبرهنة جيشغورين.

الطريقة التكرارية الأولى: (جاكوبي)

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية $AX = b$ التي مصفوفة أمثالها مربعة وغير شاذة تعرف طريقة جاكوبي العددية بأنها الطريقة التي تعرف فيها مصفوفة الأمثال بالشكل:

$$A = L + U + D$$

المصفوفة مثلثية العليا، المصفوفة المثلثية الدنيا، المصفوفة القطرية

$$A = M - N \; ; \; M = D$$

$$N = -(L + U)$$

بالاعتماد على علاقة (3) نجد أن المتتالية التكرارية لطريقة جاكوبي تعطى بالشكل:

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + C_J \quad --(4)$$

حيث $B_J = M^{-1}N = D^{-1}(L+U)$

$C_J = M^{-1}b = D^{-1}b$

حسب تعريف عام تكون متقاربة إذا تحقق

$$\|B_J\| < 1 \Leftrightarrow \rho(B_J) < 1$$

مبرهنة:

إن طريقة جاكوبي العددية والتي تعطى متتاليتها التكرارية بالعلاقة (4) تتقارب نحو حل الجملة $AX = b$ حيث $\det(A) \neq 0$ إذا كانت مصفوفة أمثالها مسيطرة قطرياً تماماً أي إذا كان:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad , i = 1, 2, \dots n$$

هذه المبرهنة تسهل في دراسة تقارب ويجب الانتباه لترتيب المعادلات فقد تكون بترتيب ما غير مسيطرة قطرياً تماماً وفي ترتيب آخر تكون مسيطرة قطرياً.

أولاً نرى إذا كانت مسيطرة قطرياً تماماً وإلا نعود لتعريف العام

أما لحل جملة معادلات بطريقة جاكوبي نتبع خطوات تمرين التالي:

أوجد الحل التقريبي للجملة:

$$9x + 4y + z = -17$$
$$x - 2y - 6z = 14$$
$$x + 6y = 14$$

وذلك بدقة أربعة منازل مستخدماً طريقة جاكوبي علماً أن القيمة الابتدائية $x^{(0)}$.

الحل: أولاً نقوم بترتيب الجملة

$$9x + 4y + z = -17$$
$$x + 6y = 14$$
$$x - 2y - 6z = 14$$

الخطوة الثانية نضع المعادلات بالشكل:

$$9x^{(k+1)} = -17 - 4y^{(k)} - z^{(k)}$$
$$6y^{(k+1)} = 14 - x^{(k)}$$
$$-6z^{(k+1)} = 14 - x^{(k)} + 2y^{(k)}$$

الخطوة ثالثة بتقسيم على 9 وثانية على 6 وثالثة على -6 نحصل على:

$$x^{k+1} = \frac{1}{9}(-17 - 4y^k - z^k)$$
$$y^{k+1} = \frac{1}{6}(14 - x^k)$$
$$z^{k+1} = -\frac{1}{6}(14 - x^k + 2y^k)$$

$x^{(0)} = y^{(0)} = z^{(0)} = 0$

$x^{(1)} = \frac{1}{9}(-17 - 4y^{(0)} - z^{(0)}) = -\frac{17}{9}$

$y^{(1)} = \frac{1}{6}(14 - x^{(0)}) = \frac{14}{6}$

$z^{(1)} = -\frac{1}{6}(14 - x^{(0)} + 2y^{(0)}) = -\frac{14}{6}$

$x^{(2)} = \frac{1}{9}(-17 - 4y^{(1)} - z^{(1)}) = -\frac{8}{3}$

$y^{(2)} = \frac{1}{8}(14 - x^{(1)}) = \frac{143}{54}$

$z^{(2)} = -\frac{1}{6}(14 - x^{(1)} + 2y^{(1)}) = -\frac{185}{54}$

$x^{(3)} = \frac{1}{9}(-17 - 4y^{(2)} - z^{(2)})$

$y^{(3)} = \frac{1}{6}(14 - x^{(2)})$

$z^{(3)} = -\frac{1}{6}(14 - x^{(2)} + 2y^{(2)})$

$x^{(4)} = \frac{1}{9}(-17 - 4y^{(3)} - z^{(3)})$

$y^{(4)} = \frac{1}{6}(14 - x^{(3)})$

$z^{(4)} = -\frac{1}{6}(14 - x^{(3)} + 2y^{(3)})$

الطريقة التكرارية الثانية (غاوس سيدل)

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية $AX=b$ التي مصفوفة أمثالها مربعة وغير شاذة تعرف غاوس سيدل العددية بأنها الطريقة التي تعرف فيها مصفوفة الأمثال بالشكل:

$$A = M - N \; ; \; M = D + L$$
$$N = -U$$

بالاعتماد على العلاقة (3) نجد أن المتتالية التكرارية لطريقة غاوس سيدل تعطى بالشكل:

$$x^{(k+1)} = B_{GS} X^{(k)} + C_{GS} \quad --(5)$$

حيث $B_{GS} = M^{-1}N = -(D+L)^{-1}U$

$C_{GS} = M^{-1}b = (D+L)^{-1}b$

حسب التعريف العام تكون متقاربة إذا تحقق

$$\|B_{GS}\| < 1 \iff \rho(B_{GS}) < 1$$

برهنة:

إذا كانت مصفوفة أمثال جملة معادلات خطية مسيطرة قطرياً تماماً فإن الحل التقريبي الناتج عن استخدام طريقة غاوس سيدل العددية والتي تعطى معادلتها التكرارية بالعلاقة (5) يتقارب نحو حل الجملة $AX = b$.

تحقيق شروط هذه المبرهنة أسهل من تحقيق شرط التعريف العام.

أما الحل جملة معادلات بطريقة غاوس سيدل.

أوجد الحل العددي لجملة المعادلات:

$$9x + y + z = 7$$
$$x + 3y + z = 5$$
$$x + y + 4z = 6$$

مقرباً إلى منزلتين وذلك باستخدام طريقة غاوس سيدل علماً أن القيمة الابتدائية $X^{(0)}$.

أولاً:

$$9x^{(k+1)} = 7 - y^{(k)} + z^{(k)}$$
$$3y^{(k+1)} = 5 - x^{(k+1)} - z^{(k)}$$
$$4z^{(k+1)} = 6 - x^{(k+1)} - y^{(k+1)}$$

لأن كل $x^{(k+1)}$ و $y^{(k+1)}$ تم إيجادهم.

ثانياً:

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{9}(7 - y^{(k)} - z^{(k)})$$
$$y^{(k+1)} = \frac{1}{3}(5 - x^{(k+1)} - z^{(k)})$$
$$z^{(k+1)} = \frac{1}{6}(6 - x^{(k+1)} - y^{(k+1)})$$

$x^{(0)} = y^{(0)} = z^{(0)} = 0$

$x^{(1)} = \frac{1}{9}(7 - y^{(0)} - z^{(0)}) = \frac{7}{9}$

$y^{(1)} = \frac{1}{3}(5 - x^{(1)} - z^{(0)}) = \frac{1}{3}(5 - \frac{7}{9} - 0) = \frac{38}{27}$

$z^{(1)} = \frac{1}{6}(6 - x' - y') = \frac{103}{162}$

$x^{(2)} = \frac{1}{9}(7 - y^{(1)} - z^{(1)}) = 0.55075$

$y^{(2)} = \frac{1}{3}(5 - x^{(2)} - z^{(1)}) = 1.27114$

$z^{(2)} = \frac{1}{6}(6 - x^{(2)} - y^{(2)}) = 0.69635$

/ /

الطريقة التكرارية الثالثة: (S.O.R)

لنكن لدينا جملة المعادلات الخطية $Ax = b$ التي مصفوفة أمثالها مربعة وغير شاذة تعرف طريقة S.O.R العددية بأنها الطريقة التي تعرف فيها مصفوفة أمثالها بالشكل

$$A = D + L + U$$

$$A = M - N \; ; \; M = \frac{D}{\omega} + L$$

$$N = \frac{1-\omega}{\omega} D - U$$

بالاعتماد على تعريف السابق والعلاقة (3) نجد أن المتتالية التكرارية الموافقة للطريقة S.O.R تعطى بالشكل:

$$x^{(k+1)} = B_{SOR}\, x^{(k)} + C_{SOR}$$

حيث:

$$B_{SOR} = M^{-1}N = -\left(\frac{D}{\omega} + L\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega} D - U\right)$$

$$C_{SOR} = M^{-1}b = \left(\frac{D}{\omega} + L\right)^{-1} b$$

ملاحظة: إذا كانت $\omega = 1$ فإن طريقة S.O.R تتطابق مع غاوس سيدل.

كلما صغر ω كانت طريقة S.O.R أفضل ضمن مجال $1 < \omega < 2$

- إن نصف القطر الطيفي لـ SOR أصغر من نصف القطر الطيفي لـ غاوس سيدل

فإذا كانت غاوس سيدل متقاربة فإن SOR متقاربة. أقرأ مثال ص 155 ... 157.

مبرهنات تسهل من معرفة تقارب لطريقة SOR:

مبرهنة (1): إذا كانت A مصفوفة معرفة إيجابياً ومتناظرة و $\omega \in \,]0, 2[$ عندئذ تتقارب طريقة SOR من أجل أي قيمة البدائية $x^{(0)}$.

حساب القيمة المثلى لـ ω:

مبرهنة (2): إذا كانت A مصفوفة معرفة إيجابياً وثلاثية الأقطار عندئذ القيمة المثلى لـ ω تعطى بالعلاقة:

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\rho(B_J)\right)^2}}$$

نصف قطر تقارب جاكوبي.

مثال مصفوفة ثلاثية الأقطار: أو ثلاث

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

العناصر التي لا تنتمي للقطر رئيسي أو القطر الذي فوقه أو الذي تحته تكون أصفار كما في شكل سابق.

تعريف هام: لنكن لدينا المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

A معرفة إيجاباً $\Leftrightarrow \det(A) > 0$

$$\forall\, K = 1, 2, \ldots, n$$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(3) = 3 > 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 9 - 1 = 8 > 0$$

$$\det(A) = 20 > 0$$

$\Rightarrow A$ معرفة إيجاباً

/ /

أما لحل جملة معادلات خطية بطريقة SOR نتبع الآتي:

لتكن لدينا جملة المعادلات:

$$3x_1 - x_2 + x_3 = -1$$
$$-x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$$
$$x_1 - x_2 + 3x_3 = -7$$

أوجد الحل باستخدام S.O.R

الحل: يجب تأكد أولاً من أنها المصفوفة A متناظرة ومعرفة إيجابياً لكي نضمن تقارب.

ومن ثم إذا كان لا نستطيع إيجاد معادلات

الخطوة الثانية: نطبق طريقة غاوس - سيدل

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3}(-1 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)})$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}(7 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)})$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{3}(-7 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)})$$

الخطوة الثالثة: ندخل عنصر $w = 1.25$ ومنه

$$x_1^{(k+1)} = (1-w)x_1^{(k)} + \frac{w}{3}(-1 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)})$$
$$x_2^{(k+1)} = (1-w)x_2^{(k)} + \frac{w}{3}(7 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)})$$
$$x_3^{(k+1)} = (1-w)x_3^{(k)} + \frac{w}{3}(-7 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)})$$

انطلاقاً من $x^{(0)} = y^{(0)} = z^{(0)} = 0$

$$x_1^{(1)} = (1-1.25)(0) + \frac{1.25}{3}(-1 + 0 + 0)$$
$$= 1 - 0.41667$$

$$x_2^{(1)} = (1-1.25)(0) + \frac{1.25}{3}(7 - 0.41667 + 0)$$
$$= 2.7431$$

$$x_3^{(1)} = (1-1.25)(0) + \frac{1.25}{3}(-7 + 0.41667 + 2.7431)$$
$$= -2.2288$$

$$X^2 = (1.4972 \quad 2.1880 \quad -2.2288)^T$$

أقرأ تمارين ص 158 _ ص 160

الخطأ المطلق والخطأ النسبي في العلاقات التكرارية.

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية $Ax=b$ حيث $\det(A)\neq$ ونفرض x حل الفعلي لهذه الجملة ($Ax=b$) و $\tilde{x}$ حل التقريبي لجملة ($A\tilde{x}=\tilde{b}$) وذلك باستخدام أحدى الطرق العددية التي تحدثنا عنها.

يعرف الخطأ الفعلي (الخطأ المطلق الفعلي):

$$E=\|x-\tilde{x}\|$$

ويعرف الخطأ النسبي الفعلي:

$$R=\frac{\|E\|}{\|x\|}=\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}$$

حيث $\|\ \|$ نظيم ما.

بينما الخطأ المطلق الأعظمي (المرتكب):

$$E\le\|A^{-1}\|.\|b-\tilde{b}\|$$

والخطأ النسبي المرتكب:

$$R\le\underbrace{\|A^{-1}\|.\|A\|}_{Cond(A)}\frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}$$

مثال:

نفرض أنه لدينا جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases}5x+7y=0.7\\7x+10y=1\end{cases}$$

حيث حل فعلي $(0, 0.1)$

فإذا أدخلنا بعض الارتياب فحصلنا على الجملة التالية:

$$\begin{cases}5\tilde{x}+7\tilde{y}=0.69\\7\tilde{x}+10\tilde{y}=1.01\end{cases}$$

حيث الحل التقريبي $(-0.17, 0.22)$

- أوجد العدد الشرطي
- " الخطأ المطلق والنسبي الفعلي.
- " " " " المرتكب.

الحل: (A

$$Cond(A)=\|A\|.\|A^{-1}\|$$

باستخدام نظيم (∞) في المصفوفات:

$$\|.\|_\infty=\max_i\sum_j|a_{ij}|=\max_{1\le i\le 2}\sum_{j=1}^{2}|a_{ij}|$$

$$\|A^{-1}\|_\infty=\max\{17, 12\}=17$$

$$\|A\|_\infty=\max\{12, 17\}=17$$

$$\Rightarrow Cond(A)=289$$

B) الخطأ المطلق الفعلي:

$$E=\|x-\tilde{x}\|=\|(\underbrace{0.17}_{0-(-0.17)}, \overbrace{-0.12}^{0.1-0.22})\|$$

نستخدم نظيم ∞ في الأشعة:

$$\|E\|_\infty=\max_{1\le i\le 2}\{|x_i|\}=0.17$$

الخطأ النسبي الفعلي:

$$R=\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}$$

$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le 2}\{|x_i|\}=0.1$$

$$\Rightarrow R=\frac{0.17}{0.1}=1.7$$

C) الخطأ المطلق المرتكب: $E\le\|A^{-1}\|.\|b-\tilde{b}\|$

$$\|b-\tilde{b}\|=\|(0.01, 0.99)\|_\infty=0.99$$

$$\Rightarrow E\le(17)(0.99)=16.83$$

الخطأ النسبي المرتكب:

$$R\le Cond(A).\frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}$$

$$\|b\|_\infty=1$$

$$\Rightarrow R\le(289)(16.83)$$

$$\le 4863.87$$

انتهى الفصل الثاني

/ /

الفصل الثالث:

الحل العددي للمعادلات التفاضلية العادية.

من أهم الموضوعات المدروسة في هذا المجال.

1- وجود ووحدانية الحلول المحققة لشروط معينة

2- خصائص الحلول.

3- مبرهنة الاستقرار

4- مسائل القيمة الحدية/التوابع المتعامدة/الطيفية المرحلة

أنواع المعادلات التفاضلية:

معادلات تفاضلية عادية — معادلات تفاضلية جزئية

تحتوي على متغير مستقل واحد يرمز لها بـ $\frac{dy}{dx}$ ، y'

تشمل المعادلات تفاضلية عادية:

مسائل القيم الابتدائية: يكون في هذه الحالة شرط ابتدائي.

مسائل القيم الحدية:

يكون في هذه الحالة شرط ابتدائي وشرط آخر عند نهاية المجال.

* نتناول في هذا الجزء بعض الطرائق العددية المستخدمة في حل المعادلة التفاضلية العادية العادية من المرتبة الأولى ذات الصيغة:

$$y' = f(x, y)$$

والمزودة بشرط ابتدائي: $y(x_0) = y_0$

تعتمد الطرائق العددية على معرفة قيمة المتغير y في لحظة البدء x_0 ثم ننطلق خطوة خطوة فنحسب y_1 من أجل $x_0 + h$ و ...

حيث $h = \frac{b-a}{M}$ ← طول الخطوة

ماهي الشروط التي نعمل فيها ضمن التحليل العددي لحل معادلات التفاضلية العادية الابتدائية؟

مبرهنة بيكار لوجود ووحدانية الحلول:

ليكن $f(x,y)$ تابعاً مستمراً على D حيث أن

$D = \{(x, y) : x \in [x_0, x_{final}]$ ، $h > 0$

$, y \in [y_0 - h, y_0 + h]\}$

ولنفرض أن: ① $|f(x, y_0)| \le K$

وذلك: $K > 0$ ، $\forall x \in [x_0, x_{final}]$

② $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le L$ أي المشتق بالنسبة لـ y محدود

وذلك لكي لا يسعى الحل إلى لا نهاية.

③ $\frac{1}{h} = h^{-1} \geq \frac{K}{L}\left(e^{L(x_0, x_{final})} - 1\right)$

طول خطوة

عندئذ يوجد حل وحيد.

أقرأ مثال 167.

تعريف: نقول عن مسألة القيمة الابتدائية

$y(a) = \alpha$ $\quad a \le x \le b$ ، $y' = f(x, y)$

إنها موضوعة جيداً (أو جيدة الطرح) إذا تحققت الشروط التالية:

1- للمسألة حل وحيد

2- من أجل أي عدد موجب ε يوجد ثابت موجب $K(\varepsilon)$ حيث أنه إذا كان $|\varepsilon_0| < \varepsilon$

و $\delta(x)$ تابع مستمر على $[a,b]$ يحقق $|\delta(x)| < \varepsilon$

على المجال $[a,b]$ يوجد حل وحيد $Z(x)$ للمسألة

$$Z(a) = \alpha + \varepsilon_0$$

$$Z'(x) = f(x, y) + \delta(x)$$

حيث $a \le x \le b$

بحيث يحقق $|Z(x) - y(x)| < \varepsilon \cdot K(\varepsilon)$

ندعو المسألة في الشرط الثاني بالمسألة القلقة (استقرار)، أقرأ مثال 2 ص 168 + 169

/ /

الطرائق العددية
- عدة خطوات
- ذات خطوة واحدة
  - أويلر
  - تايلور
  - طرائق رانج-كوتا
    - مرتبة ثانية
    - نقطة منتصف معدلة هين
    - مرتبة ثالثة
    - مرتبة رابعة

الطرائق العددية:

-أ- ذات الخطوة الواحدة:

1) أويلر: الهدف هو إيجاد تقريب لمسألة قيمة ابتدائية موضوعة جيداً.

الصيغة العامة لقانون أويلر:

$$y_{n+1} = y_n + h.f(x_n, y_n)$$

حيث $x_n = x_0 + nh$

و $h = \frac{b-a}{n}$

و $n = 0, 1, \dots, M-1$

الخطأ الأعظمي المرتكب:

$$E_{max} \le \frac{1}{L}\left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}\right)\left[e^{L(x_{final} - x_{min})} - 1\right] + \delta e^{L(x_{final} - x_{min})}$$

حيث δ هي خطأ تدوير الأعظمي

$$\delta = \max\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$$

$$M > |y''|$$

$$L > \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$$

اقرأ مثال ص171 + ص172

حساب خطأ الأعظمي في تدوير الأرقام.

أما دكتورة تذكر نص السؤال بالامتحان أن الأرقام مدورة إلى 6 أرقام عشرية عندها نكتب: 0.5×10^{-6}

أو حسب مثال 4 ص173 نتحقق الأرقام

$Z_1 = 1$, $\delta_1 = 0.5\times10^{-6}$ ، $Z_2 = 1.04837$, $\delta_2 = 0.5\times10^{-5}$ ، $Z_3 = 1.018731$, $\delta_3 = 0.5\times10^{-6}$ ، $Z_4 = 10.40818$, $\delta_4 = 0.5\times10^{-5}$

$$\max\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\} = \delta_1$$

حساب M:

$$M \ge |y''(x)|$$

إذا كان الحل الفعلي للمسألة تفاضلية عندها نشتقه مرتين بالنسبة لـ x

أما إذا لم يأتو نطبق الآتي:

$$y' = f(x,y)$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{df(x,y)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}(f)$$

ثم نأخذ أعظم قيمة لـ y''

ملاحظات: عند y_0 يتطابق حل تقريبي مع الحل الفعلي وبعدها يبتعد لذلك y_0 هي أدق قيمة.

لا يطلب حساب الخطأ الأعظمي إلا في طريقة أويلر.

2) تايلور: الصيغة العامة لقانون تايلور:

$$y_{n+1} = y_n + hT^{(k)}(x_n, y_n) \quad : n = 0, 1, \dots, N-1$$

حيث:

$$T^{(k)}(x_n, y_n) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} f'(x_n, y_n) + \dots + \frac{h^{(k-1)}}{(k)!} f^{(k-1)}(x_n, y_n)$$

ملاحظة: يمكن اعتبار طريقة أولر على أنها طريقة تايلور من المرتبة الأولى وكلما كانت درجة حدودية تايلور أكبر كانت الدقة أكبر

« لكن من صعب إيجاد مشتقات جزئية »

تايلور من المرتبة الثانية $k=2 \Rightarrow T^{(2)}$

تحتاج $f'(x_n, y_n)$ فقط

بينما تايلور من المرتبة الرابعة $k=4 \Rightarrow T^{(4)}$

تحتاج $\underbrace{f'(x_n, y_n)}_{\text{موجودة}}$ ، $f''''(x_n, y_n)$

من قانون $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}(f)$ أو نشتق مع مقاربين إذا كان موجوداً

$f'''(x_n, y_n)$ نحسب بالمشتقات $f''(x_n, y_n)$

3) طرائق رانج-كوتا: إن الشكل العام للحل التقريبي لطرائق رانج-كوتا هو $y_{n+1} = y_n + \phi h$ حيث ϕ يمكن أن يعبر عنها بالشكل: $\phi = a_1 K_1 + a_2 K_2 + \dots + a_n K_n$

تقسم طرائق رانج-كوتا إلى عدة مراتب كالتالي:

-1- رانج-كوتا من المرتبة الثانية:

تعتبر طريقة نقطة المنتصف من طرائق رانج-كوتا من المرتبة الثانية ويتم إيجاد الحل التقريبي بالعلاقة التالية:

$$y_0 = \alpha$$

$$(*) \quad y_{n+1} = y_n + (a_1 K_1 + a_2 K_2)h$$

حيث

$$K_1 = f(x_n, y_n)$$

$$K_2 = f(x_n + \underbrace{p_1 h}_{\Delta x}, y_n + \underbrace{a_{11} K_1 h}_{\Delta y})$$

يوجد أربعة وسطاء مثلين بالعبارة وهي a_1 و a_2 و p_1 و a_{11}

باستخدام نشر تايلور ~~[illegible]~~ نحصل:

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)h + \frac{1}{2!} f'(x_n, y_n)h^2$$

وبمطابقتها مع (*) نحصل:

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_2 p_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 a_{11} = \frac{1}{2}$$

وبهذا لدينا 3 معادلات بأربع مجاهيل فنختار قيمة لأحد المجاهيل وليكن a_2 ونستنتج المجاهيل الباقية بدلالته:

$$a_1 = 1 - a_2 \quad ; \quad p_1 = \frac{1}{2a_2} \quad ; \quad a_{11} = \frac{1}{2a_2}$$

* ندرج تحت طريقة نقطة المنتصف ثلاث طرق وهي:

-1- طريقة أولر المعدلة:

نحصل عليها عن طريق نقطة منتصف بوضع $a_2 = 1$ بالتعويض نحصل: $a_{11} = \frac{1}{2}$ ، $p_1 = \frac{1}{2}$ ، $a_1 = 0$

نعوض في (*) نجد: $y_{n+1} = y_n + K_2 h$

حيث $K_1 = f(x_n, y_n)$ و

$$K_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}K_1 h)$$

2- طريقة هين: نحصل عليها من طريقة نقطة المنتصف بوضع $a_2 = \frac{1}{2}$ بالتعويض نحصل $a_1 = \frac{1}{2}$ ، $p_1 = 1$ ، $q_{11} = 1$
وعليه بالتعويض في (*) نجد أن:

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2\right)h$$

حيث $K_1 = f(x_n, y_n)$ و $K_2 = f(x_n + h, y_n + K_1 h)$

3- طريقة رالستون: نحصل عليها من طريقة نقطة المنتصف بوضع $a_2 = \frac{2}{3}$ عندئذ ينتج: $a_1 = \frac{1}{3}$ ، $p_1 = \frac{3}{4}$
$q_{11} = \frac{3}{4}$ بالتعويض في (*) نحصل على:

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{1}{3}K_1 + \frac{2}{3}K_2\right)$$

حيث $K_1 = f(x_n, y_n)$ و $K_2 = f(x_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}K_1 h)$

أقرأ ص 185 + ص 186 مثال 7 + 8.

4- طريقة رانج-كوتا من المرتبة الرابعة:
تعطى معادلتها بالشكل:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

حيث $K_1 = h\, f(x_n, y_n)$ و $y_0 = \alpha$

$K_2 = h\, f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}K_1)$

$K_3 = h\, f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}K_2)$

$K_4 = h\, f(x_n + h, y_n + K_3)$

هي مركبة أولى ولكن x — هي مركبة ثانية ولكن y

تنبيه: من الخطأ إخراج (h) من K_1 و K_2 و K_3 و K_4 كعامل مشترك.
لا نستطيع إخراجه نتقيد في القانون فقط.
أقرأ مثال ص 189 مثال 9 + مثال 10 ص 190
+ مثال 11 ص 191 + ص 192

جميع الطرق السابقة تعتمد على الخطوة الواحدة.

ب- طرائق ذات الخطوات المتعددة:
الطريقة العامة لقانون الحل التقريبي باستخدام طريقة الخطوات المتعددة:

$$y_{n+1} = a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \cdots + a_n y_0 + h[b_0 f(x_{n+1}, y_{n+1}) + b_1 f(x_n, y_n) + \cdots]$$

وتنقسم إلى طريقتين:
1) طريقة الصريحة (الظاهرية): عندها $b_0 = 0$
فإذا أردنا حساب y_4 فإننا نحتاج إلى y_3 و y_2 و y_1 و y_0 أولاً - بيشفارث
2) طريقة الضمنية
عندها $b_0 \neq 0$ فلو أردنا حساب y_4 فإننا نحتاج إلى y_4^* و y_3 و y_2 و y_1 و y_0
حيث y_4^* محسوبة بأحد طرائق السابقة ذات الخطوة الواحدة.
وتدعى بطرائق آدمس-مولتون.

/ /

صيغة طريقة آدامس - باشفورث: (ظاهرية) نبدأ: $i = 0, \ldots, n-1$

خطوة واحدة (مرتبة أولى)
$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

خطوتين (مرتبة ثانية)
$$y_{i+2} = y_{i+1} + \frac{h}{2}\left[3 f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)\right]$$

ثلاث خطوات (مرتبة ثالثة)
$$y_{i+3} = y_{i+2} + \frac{h}{12}\left[23 f(x_{i+2}, y_{i+2}) - 16 f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 5 f(x_i, y_i)\right]$$

أربع خطوات (مرتبة رابعة)
$$y_{i+4} = y_{i+3} + \frac{h}{24}\left[55 f(x_{i+3}, y_{i+3}) - 59 f(x_{i+2}, y_{i+2}) + 37 f(x_i, y_i) - 9 f(x_i, y_i)\right]$$

صيغة طريقة آدامس - مولتون: (ضمنية):

متناول

خطوة واحدة
$$y_{i+1} = h \cdot f(x^*_{i+1}, y^*_{i+1})$$

مرتبة ثانية خطوتان
$$y_{i+2} = y_{i+1} + \frac{h}{2}\left[f(x^*_{i+2}, y^*_{i+2}) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]$$

مرتبة ثالثة ثلاث خطوات
$$y_{i+3} = y_{i+2} + \frac{h}{12}\left[5 f(x^*_{i+3}, y^*_{i+3}) + 8 f(x_{i+2}, y_{i+2}) - f(x_i, y_i)\right]$$

مرتبة رابعة أربع خطوات
$$y_{i+4} = y_{i+3} + \frac{h}{24}\left[9 f(x^*_{i+4}, y^*_{i+4}) + 19 f(x_{i+3}, y_{i+3}) - 5 f(x_{i+2}, y_{i+2}) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]$$

حيث $f(x^*_{i+1}, y^*_{i+1})$ و $f(x^*_{i+2}, y^*_{i+2})$ و $f(x^*_{i+3}, y^*_{i+3})$ و $f(x^*_{i+4}, y^*_{i+4})$ محسوبة من طرائق سابقة التي تعتمد على خطوة الواحدة

أقرأ مثال 14 ص 203

انتهى الفصل الثالث

انتهى مقرر

تحليل عددي (2)

Reem Al-Rahabi

بالتوفيق

1) الفصل الأول: بحث التقريبات باستخدام المربعات الصغرى

ملاحظة(1): صعوبة التقريب ليس من صعوبة أن تمر من جميع نقاط معطاة ولكن من أن نضعها إيجاد دالة التي تجعل خطأ أصغر ما يمكن.

ملاحظة(2): الخطأ الفعلي: $E = |T - Q|$
دالة أصلية ، دالة تقريب

الخطأ النسبي $R = \frac{E}{T}$

ملاحظة: يجب الانتباه على نوع النظم التي تطلبه دكتورة منا في الامتحان وإذا تركت لنا حرية الاختيار فنختار الأسهل طبعاً ولكسب علامة صح.

ملاحظة: إذا طلب تقريب (تابع قطعي) نستخدم فإن G من مرتبة 2×2 وإذا ـــ ـــ بحدودية من درجة ثانية فإن G من مرتبة 3×3 وإذا طلب تقريب جدودية من درجة n فإن G من مرتبة $(n+1)\times(n+1)$ وهكذا.

ملاحظة: تختلف دالة الوزن من دالة تقريب إلى أخرى.

في البيانات منقطعة جميع قوانين $\sum$ بينما البيانات مستمرة جميع قوانين $\int$

ملاحظة: بالتقريب بالحدوديات متعامدة G تكون قطرية يعني فقط يجب حساب عناصر قطر رئيسي.

ملاحظة: جميع تكاملات تحل بالآلة الحاسبة لكن قد يأتي تكاملات لا يمكن إدخالها فوراً بل يجب معالجتها مثال: $f(x) = \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$\int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ إذا وضعناها في آلة الحاسبة سيظهر لك رسالة erorr

لكن إذا عالجناها أولاً أي:

$$f(x) = \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = 1.57079$$

ملاحظة: يجب فقط أخذ 5 أرقام بعد الفاصلة وإذا كان رقم قصير نضعه كامل.

ملاحظة: العلاقة التي توجد جذور هي:

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad \forall\, k = 1, 2, \dots, n$$

هذه الصحيحة فقط

ملاحظة: عند تقدير الخطأ باستخدام أصفار تشيبيتشيف بأننا نحتاج إلى max القيمة المطلقة لمشتق تابع فإذا كان تابع متزايد على مجال ما فإننا نعوض بنهاية مجال وإما إذا متناقص فإننا نعوض ببداية مجال وأما إذا كان عبارة عن خليط من تزايد وتناقص نعوض ببداية مجال ونعوض بنهاية مجال والأكبر بالقيمة المطلقة هو قيمة مطلوبة.

أما إذا كان عبارة عن مجموع مقادير فإننا max قيمة مطلقة لمجموع تساوي max مجموع قيم مطلقة أي: $\max|a+b+c| \le \max\{|a|+|b|+|c|\}$

2) الفصل الثاني: الحل العددي لجملة المعادلات الخطية.

ملاحظة: إذا طلب استخدام نظيم ولم يتم تحديد نوعه فإننا نختار الأسهل

ملاحظة: عند حساب معادلة مميزة من درجة (3) قد ينتج حل حقيقي وحلين عقديين.

لحساب $\rho(A) = \max\{|\lambda|\}$

فإن قيمة مطلقة لعدد عقدي هي نفسها الطويلة $|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$

ملاحظة: يختلف العدد الشرطي $Cond(A)$ من مسألة لمسألة.

$Cond(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$

هذا نظيم بالنسبة للمصفوفات.

ملاحظة: إذا كان عدد شرطي صغير فليس من ضروري أن يكون للمسألة حل أو مسألة بينما لو كبير فإنه غير معروف إذا للمسألة حل أو لا.

ملاحظة: لو طلب حل جملة معادلات بطريقة ما وطلب تأكد من صحة أجوبة فإننا نعوض القيم التي نتجت معنا في المعادلات إذا حققت تكون إجابة صحيحة وإلا فتكون خاطئة.

ملاحظة: ليست أي مصفوفة تحل بطريقة تشولسكي إلا ضمن شروط معينة وهي أن تكون مصفوفة الأمثال متناظرة ومعرفة إيجابياً.

ملاحظة: جذر تربيعي لأي عدد له جذر موجب وجذر سالب إنما دكتورة دوماً تأخذ جذر موجب

ملاحظة: إذا طلب منا دراسة تقارب جملة المعادلات فإننا نبحث عن مصفوفة B وهي تختلف من طريقة إلى أخرى

جاكوبي - غاوس سيدل - S.O.R

ومن ثم نبحث $\rho(B) < 1$ عندها تكون متقاربة وهذا حسب تعريف عام دائماً بالدورة إلا المبرهنات التي تبسط الأمر أما الحل فإننا نتبع الخطوات التي تحدثت عنها في المحاضرات كل واحدة على حدة.

ملاحظة: إذا لم يتم تحديد طريقة لدراسة تقارب فإننا نختار الأسهل.

3) الفصل الثالث: الحل العددي للمعادلات تفاضلية العادية.

ملاحظة: $y' = \overbrace{f(x,y)}^{\text{فقط تحوي } (x,y)}$ أي من شكل

$y' = x + y - 1$

لكن لو كانت من شكل

$3x + 2y' = 5y - 2$

$\Rightarrow y' = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y - 1$

ملاحظة: $E(h) = \left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}\right)$ هذه عبارة خطأ بطريقة أولر نلاحظ أن خطأ التدوير أثر بشكل عكسي على عبارة خطأ وهنا لا يمكن أن نحكم بأنه إذا صغرت h صغر الخطأ من أجل ذلك نريد البحث عن h التي تجعل الخطأ أصغر ما يمكن وهي تعطى بالعلاقة:

$h_{opt} \sqrt{\frac{2\delta}{M}}$

ملاحظة: إذا قالت دكتورة تريد m تكرار مثلاً فنبدأ من $n=0$ وننتهي عند $n=m$ ولهذا في حساب جميع x ضمن مجال معطى إذا لم

تكن تريد استخدامها

تكملة ملاحظات الفصل الثالث:

مثال رقم (9) فقط كيفية الحل الذي تستخدم طريقة.

$$y' = \underbrace{-y + x + 1}_{f(x,y)}$$

$$y(0) = 1 \Longleftrightarrow x_0 = 0 , y_0 = 1$$

$0 \le x \le 1$ $h = 0.1$ وتكرارين

الحل: $x_n = x_0 + nh$

تكرارين أي $n=0 , n=1 , n=2$

$\Rightarrow n=0 \Rightarrow y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$k_1 = hf(x_0, y_0) = (-y_0 + x_0 + 1)0.1$

$= 0.1(-1 + 0 + 1) = 0$

$k_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_1)$

$= 0.1 f(\underbrace{0 + \frac{0.1}{2}}_{\text{مركبة أولى}}, \underbrace{1 + \frac{1}{2}(0)}_{\text{مركبة ثانية}})$

$= 0.1\left(-(\text{مركبة ثانية}) + (\text{مركبة أولى}) + 1\right)$

$= 0.1(-1 + 0.05 + 1) = 0.005$

$k_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_2)$

$= 0.1(-1.0025 + 0.05 + 1) =$ 0.00475

$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3)$

$= 0.1(-1.00475 + 0.1 + 1) = 0.009525$

$\Rightarrow y_1 = 1 + \frac{1}{6}\left(0 + 2(0.005) + 2(0.00475) + 0.009525\right)$

$= 1.0048375$

$n=1 \Rightarrow y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$k_1 = hf(x_1, y_1)$

$k_2 = hf(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{1}{2}k_1)$

$k_3 = hf(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{1}{2}k_2)$

$k_4 = hf(x_1 + h, y_1 + k_3)$

أما عندما $n=2$

$y_3 = y_2 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

حيث $k_1 = hf(x_2, y_2)$

$k_2 = hf(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{1}{2}k_1)$

$k_3 = hf(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{1}{2}k_2)$

$k_4 = hf(x_2 + h, y_2 + k_3)$

وهكذا...

سؤال دورة: ليكن لدينا معادلة تفاضلية الآتية

$$y' = \underbrace{y - x^2 - 1}_{f(x,y)} \quad ; 0 \le x \le 2$$

و $y(0) = 0.5$ و $n = 6$ والحل الفعلي $y = (x+1)^2 - 0.5e^x$ والأرقام مقربة لـ 5 مراتب عشرية.

أوجد كل من M و δ و h و L

$$h = \frac{x_{final} - x_{min}}{n} = \frac{2 - 0}{6} = \frac{1}{3}$$

$\delta = 0.5 \times 10^{-5}$ $\Leftarrow$ أرقام مقربة لـ 5 مراتب عشرية

$L = \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |1| \Rightarrow L = 1$

واشتققنا من فعلي مرتين

$M = \left|\frac{\partial y'}{\partial x}\right| = |y''| = |2 - 0.5e^x|$

هنا ملاحظة حسب خواص قيمة مطلقة

$\le |2| + 0.5e^x$

e^x دالة متزايدة

$\le 2 + 0.5e^2 = 5.69452$

في الفصل الثاني: أحد الأسئلة المطروحة.
لتكن جملة معادلات

$$2x + y - 3z = 4$$
$$6x - y + 4z = 5$$
$$11x + 7y - 3z = 11$$

احسب بطريقة غاوس سيدل علماً أن قيمة ابتدائية $(0,0,0)$ وبعدد تكرارات (3)
ثم احسب الخطأ النسبي المرتكب في كل خطوة.

الحل: شق الأول من سؤال معروف وحللنا مثله بينما الشق الثاني: الخطأ النسبي $= \dfrac{\text{الحل الفعلي} - \text{الحل التقريبي}}{\text{الحل الفعلي}} = \dfrac{x_{new} - x_{old}}{x_{new}}$

$$\underbrace{(x^{(0)}\ \ y^{(0)}\ \ z^{(0)})}_{x_{old}} \longrightarrow \underbrace{(x^{(1)}\ \ y^{(1)}\ \ z^{(1)})}_{x_{new}}$$

$$\underbrace{(x^{(1)}\ \ y^{(1)}\ \ z^{(1)})}_{x_{old}} \longrightarrow \underbrace{(x^{(2)}\ \ y^{(2)}\ \ z^{(2)})}_{x_{new}}$$

وهكذا يتبع حل...

سؤال دورة: لتكن معادلة تفاضلية: $y' = x + 3\dfrac{y}{x}$
حيث $h = 0,1$ ولدينا $0 \le x \le 1$ و

y_i	y_0	y_1	y_2
	0	0.120489	0.287577

1) احسب y_3 باستخدام رانج كوتا مرتبة رابعة:

$x_0=0$, $x_1=0.1$, $x_2=0.2$, $x_3=0.3$, $x_n=1$, $h=0.1$

$$y_3 = y_2 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

حيث $K_1 = h f(\underbrace{x_2}_{\text{من محور}}, \underbrace{y_2}_{\text{من جدول}})$

$$K_2 = h f\left(x_2 + \frac{h}{2},\ y_2 + \frac{1}{2}K_1\right)$$
$$K_3 = h f\left(x_2 + \frac{h}{2},\ y_2 + \frac{1}{2}K_2\right)$$

ناتج الخطوة

$$K_4 = h f(x_2 + h,\ y_2 + K_3)$$

2) أوجد y_4 باستخدام آدامس باشفورث مرتبة رابعة بالاستعانة من طلب (1).

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}\left[55 f(x_3, y_3) - 59 f(x_2, y_2) + 37 f(x_1, y_1) - 9 f(x_0, y_0)\right]$$

y_3 من طلب (1) محسوبة و y_2 و y_1 و y_0 من الجدول
x_0 ، x_1, x_2, x_3 من محور أو بتطبيق قانون $x_n = x_0 + nh$

3) أوجد y_4 باستخدام آدامس - مولتون مرتبة رابعة بالاستعانة ب (2).

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}\left[9 f(x_4, y_4) + 19 f(x_3, y_3) - 5 f(x_2, y_2) + f(x_1, y_1)\right]$$

y_4 من طلب الثاني ، y_3 من طلب الأول
y_0, y_1, y_2 من الجدول
بينما x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 من محور أو بتطبيق القانون $x_n = x_0 + nh$

الملاحظة الأخيرة بعون الله:
من خلال أسئلة الدورات أحياناً نعرض عبارة حل الفعلي من أجل إيجاد القيم الابتدائية بدلاً من جدول لأن الحل الفعلي يأتي $y(x)$
أي $y = (\underbrace{\quad\quad}_{\text{بدلالة } x})$

طريقة استخدام الآلة الحاسبة

بشكل عام: افتح الرابط
www.google.com
وضع في محرك البحث ما تريد عن استخدام الآلة الحاسبة مرفقاً باسم الآلة الحاسبة الخاصة بكم.

أما أنا سأشرح عن الآلة الحاسبة
CASIO fx-991ES plus

أولاً: حل جملة معادلات خطية من البعد 2x2 أو 3x3.

اضغط mode ← ضع رقم 5 EQN

اضغط (1)
$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$
يظهر الشكل:
$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$
ضع الأرقام التي نريدها ندخلها وبين كل رقم يساوي لإدخال رقم التالي.
وعند انتهاء التعبئة نضغط = أول مرة تظهر قيمة x
مرة ثانية تظهر قيمة Y =

اضغط (2)
$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$
يظهر الشكل:
$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$
ندخل الأرقام ونضع = بين كل رقم لندخل الرقم الذي يليه وعند انتهاء التعبئة نضغط أول يساوي نحصل على x نضغط =
مرة ثانية نحصل على Y
مرة ثالثة نضغط = نحصل على Z.

للرجوع للوضع القديم نضغط Mode ← COMP 1

حساب det(A) علماً أن $A\in M_n(\mathbb{R})$

نضغط Mode ← نضغط رقم 6 MATRIX ←
نعرف إما مصفوفة A(1) أو B(2) أو C(3)
لنضغط (1) ←

نضغط (1)
إذا البعد 3x3
تظهر مصفوفة من شكل
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
نقوم بتعبئتها ثم نضغط AC
من ثم نضغط Shift+4
نضغط (7)
يظهر على شاشة det(
مرة ثانية نضغط Shift+4
نضغط (3)
لأن مصفوفة معرفة A
لو عرفناها B نضغط 4 لو عرفنا C نضغط 5.
ثم نغلق القوس ونضغط يساوي
يظهر الناتج

نضغط (2)
إذا البعد 2x2
تظهر مصفوفة من شكل
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
نقوم بتعبئتها ثم نضغط AC

إيجاد مقلوب مصفوفة:

نضغط Mode ← 6 Matrix ←

نختار أما (1) أو (2) أو (3) نضغط (1) ←

نختار أما 3x3 أو 2x2 نضغط (1) أو (2)

← يظهر أما $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ أو $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ثم ندخل الأرقام وبين كل رقم ورقم يساوي

نضغط AC لحفظ مصفوفة بعد الانتهاء

من ثم نضغط Shift + 4 ومن ثم نختار مصفوفة

التي عرفناها أما (3) أو (4) أو (5)

وبعد ذلك في زر بالأعلى هو (x^{-1}) نضغطه

من ثم يساوي

فتظهر مقلوب مصفوفة الأصلية.

مقلوب مصفوفة قطرية هي عناصر قطر رئيسي بإشارة ناقص

إيجاد ضرب أو جمع مصفوفتين:

اضغط Mode ← 6 Matrix ← نعرف

مصفوفة A أولاً ندخل لها الأرقام ونضغط

AC لحفظها ثم نضغط shift+4 ~~Mode~~ ثم نختار

رقم (3) Data ~~Matrix~~ ← نعرف مصفوفة B وندخل

لها الأرقام ثم AC

والآن نفتح قوس نضغط Shift+4

نضغط على مصفوفة A نغلق القوس نضع (X)

أو (+) ثم نضغط Shift+4 ثم نضع مصفوفة B

ثم يساوي فنحصل على جواب.

ملاحظة: جمع المصفوفات لازم من نفس المرتبة المصفوفتين

ضرب المصفوفات عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى يساوي عدد الأسطر في المصفوفة الثانية.

إيجاد القيم الذاتية من المعادلة المميزة:

سنطبق على تمرين $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

نحسب $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(3-\lambda) - 4 = 0$$

$$6 - 2\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\overset{a}{}\lambda^2 - \overset{b}{5}\lambda + \overset{c}{2} = 0$$

والآن نضغط على mode ← EQN 5

ومن ثم رقم (3) يظهر الشكل $[a \quad b \quad c]$

ندخل الأرقام ثم نضغط =

يظهر

$$\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

نحسب $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 6 \\ 3 & 1-\lambda & 2 \\ 5 & 7 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda) - 14] + 6[21 - 5(1-\lambda)]$$

$$-4[3(3-\lambda) - 10] = 0$$

بالفك نحصل

$$-\overset{a}{}\lambda^3 + \overset{b}{6}\lambda^2 + \overset{c}{45}\lambda + \overset{d}{28} = 0$$

نضغط mode ← 5 ← نختار 4 يظهر

$[\overset{a}{0} \quad \overset{b}{0} \quad \overset{c}{0} \quad \overset{d}{0}]$

ندخل الأرقام فنحصل على:

$\lambda_1 = 10.3272$

$\lambda_2 = -0.69383$

$\lambda_3 = -3.83343$