تمرينات الفصل الأول

1- أثبت أن التمثيلين الوسيطيين:

$$t \to r_1(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2at}{1+t^2}, 2b \text{ Arctg} t \right)$$
$$\tau \to r_2(\tau) = (a\cos\tau, a\sin\tau, b\tau)$$

متكافئان.

2- أثبت أن علاقة التكافؤ على التمثيلات الوسطية هي انعكاسية تناظرية ومتعدية.

3- أثبت أن التمثيلين الوسيطيين:

$$t \to (\ln t, \sin(\ln t), t) \quad , \quad 0 < t < \infty$$
$$\tau \to (\tau, \sin\tau, e^{\tau}) \quad , \quad -\infty < \tau < \infty$$

متكافئان .

4- أثبت أنه لا توجد نقاط شاذة للطريق :

$$[-2\pi, 2\pi] \to \Re^3 \qquad , t \to \left(1+\cos t, \sin t, 2\sin\frac{t}{2}\right)$$

وأن المنحني المعين بهذا التمثيل يقع على الكرة التي مركزها o ونصف قطرها 2 وعلى الأسطوانة :

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

5- أثبت أن النقاط $t_k = 2k\pi$، حيث أن k عدد صحيح، هي نقاط شاذة أساسية للدويري . وأن $t = 0$ هي نقطة شاذة أساسية لـ :

$$x = t^2 \quad , y = t^3$$

6- أوجد تمثيلاً وسطياً لا يحوي جذوراً للمنحني الناتج عن تقاطع الأسطوانة :

$$x^2 + y^2 = 1$$

والمستوي :

$$x+y+z=1$$

7- أثبت وجود دالة غامرة ومتزايدة ومستمرة للفترة $[a,b]$ على الفترة $[0,1]$ وكذلك وجود دالة غامرة ومتزايدة ومستمرة للفترة $]-\infty,\infty[$ على $]0,1[$

8- أوجد طول الطريق :

$$r(t)=(3\,ch\,2t \;,\; 3\,sh\,2t \;,\; 6t) \quad ,\; 0\le t\le \pi$$

9- أوجد تمثيلاً طبيعياً للمنحني:

$$r(t)=(e^t\cos t \;,\; e^t\sin t \;,\; e^t)\;,\quad -\infty<t<+\infty$$

10- أوجد طول قوس واحد $0\le t\le 2\pi$ للدويري . أوجد طول جزء الدويري بين النقطتين اللتين تقابلان القيمتين 0 و t للوسيط ، ومن ثم أوجد تمثيلاً طبيعياً له.

11- أوجد طول المنحني بين النقطتين اللتين تقابلان القيمتين $\frac{\pi}{2}$ و t للوسيط ($\frac{\pi}{2}$ نقطة شاذة) .

12- أثبت أن :

$$x=a\left(\ln t+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \quad , y=\frac{2at}{1+t^2} \qquad 0<t<\infty$$

هو تمثيل وسيطي آخر للمنحني.

13- أثبت أن مماسات اللولب في نقاط مختلفة منه ، تتقاطع بزاوية ثابتة محور z.

14- أثبت أنه إذا تقاطعت جميع مماسات منحنٍ في النقطة نفسها كان خطاً مستقيماً

15- أوجد المنحني الناتج عن تقاطع المستوي oxy والمستقيمات المماسة للولب

$$t\to r(t)=(\cos t \,,\, \sin t \,,\, t) \quad , \; t>0$$

16- أثبت أن المتجهات المماسة على طول المنحني :

$$r(t) = \left(\frac{2}{3}t , t^2, t^3 \right)$$

تصنع زاوية ثابتة مع المتجه $u = (1,0,1)$.

17- أوجد معادلة المستوي الملاصق لكل من المنحنيات:

أ- $x = \frac{1}{2}z^2 \quad , \quad x = y$

ب- $z = 2t \ , \ y = 1 - t^2 \ , \ x = t^2$

ج- $z = t^3 \ , \ y = t^2 \ , \ x = t$

وذلك في النقطة الموافقة لقيمة الوسيط $t = 1$

18- أثبت أن المستقيم :

$$x = x_0 \quad , \quad y = y_0$$

هو مقارب للمنحني :

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t)$$

عندما $t \to \infty$ إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x_0 \quad , \quad \lim_{t \to \infty} y(t) = y_0 \quad , \quad \lim_{t \to \infty} z(t) = \pm\infty$$

19- أثبت أن محور z هو مقارب للمنحني :

$$x = e^{-t} \cos e^t$$

$$y = e^{-t} \sin e^t$$

$$z = t$$

عندما $t \to \infty$.

أوجد متجه الوحدة المماس لهذا المنحني، وأثبت أن ليس له نهاية عندما $t \to \infty$

20- أوجد المستقيم المقارب للمنحني :

$$x = e^t \cos t$$

$$y = e^t \sin t$$

$$z = \frac{1}{t}$$

حيث : $0 < t < \infty$

عندما $t \to 0$ وعندما $t \to \infty$.

21- بفرض $0 < t < \infty$ أوجد المستقيم المقارب للمنحني :

$$x = \frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{t}}$$

$$y = \frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{t}}$$

$$z = t$$

عندما $t \to 0$ وعندما $t \to \infty$.

22- إذا كان :

$$t \to \mathbf{r}(t)$$

تمثيلاً لمنحن $\mathscr{C}$ فأثبت أن المتجه $\mathbf{r}'(t)$ هو تركيب خطي بـ $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ (يوازي المستوي اللاصق) وأوجد معاملاته .

23- أوجد تقاطع المستوي oxy والمستوي الناظم للمنحني :

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

في النقطة $t = \frac{\pi}{2}$

24- أوجد ثلاثية فرينيه في نقطة t من المنحني :

$$\mathbf{r}(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$$

25- أوجد تقوس كلا من المنحنيات : اللولب ، الدويري ، السحي

26- أوجد تقوس السلسلي الذي يمثل بـ :

$$y = a\,ch\,\frac{x}{a} \quad , z = 0$$

27- أوجد تقوس المنحني :

$$r(t) = (\, t - \sin t \,,\, 1 - \cos t \,,\, t \,)$$

28- أوجد مراكز تقوس القطع الناقص :

$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t$$

وذلك في نقاط تقاطعه مع محاوره .

29- أثبت أن مراكز تقوس لولب حلزوني تشكل لولباً حلزونياً أيضاً ، له محور اللولب الأول نفسه.

30- أوجد معادلة المستقيم القطبي للولب في نقطة منه .

31- أثبت أن مماس منحنٍ في نقطة ما ، والمماس في النقطة المقابلة من المحل الهندسي لمراكز تقوس المنحني ، هما اتجاهان متعامدان .

32- أوجد تقوس والتفاف كل من المنحنيات :

أ - $x = t \;,\; y = t^2 \;,\; z = t^3$

ب - $y = f(x) \quad , \; z = g(x)$

ج - $x = 3t - t^3 \;,\; y = 3t^2 \;,\; z = 3t + t^3$

د - $x = t \;,\; y = \dfrac{1+t}{t} \;,\; z = \dfrac{1-t^2}{t}$

هـ - $x = a(t - \sin t) \;,\; y = a(1 - \cos t) \;,\; z = bt$

33- أثبت أنه إذا كان $r=r(s)$ تمثيلاً طبيعياً لمنحن ذي تقوس ثابت فإن:

$$s \to r_1(s) = \int_0^s b(u)\,du$$

هو تمثيل لمنحن ذي التفاف ثابت .

34- أثبت أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون المنحني $s \to r(s)$ مستوياً هو أن يكون التفافه معدوماً في جميع نقاطه .

35- أثبت أن المنحني :

$$r(t) = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t}\right)$$

يقع في مستو .

36- أثبت أن تقوس المنحني السوي الممثل بالمعادلة القطبية

$$r = r(\theta)$$

يعطى بـ :

$$\kappa = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$$

37- أوجد مسقط اللولب :

$$r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

على كل من المستويات : الملاصق ، الناظم ، القائم .

وذلك في جوار النقطة $t = \frac{\pi}{4}$.

38- أوجد منشوراً لكل من المنحنيات : اللولب ، الدويري ، السحي .

39- أوجد ناشراً للولب .

40 - أثبت أن تقوس الناظر؛

$$R = r + (c - s)\, t$$

للمنحني :

$$s \to r(s)$$

يعطى بـ :

$$\kappa^{*2} = \frac{\kappa^2 + \tau^2}{(c-s)^2\, \kappa^2}$$

41 - أثبت أن متجه وحدة ثنائي الناظم للناظر :

$$R = r + (c - s)\, t$$

للمنحني :

$$s \to r(s)$$

يعطى بـ :

$$b^* = \frac{\kappa b + \tau t}{|(c-s)\,\kappa|\,\kappa^*}$$

42 - أوجد ممثلاً وسطياً للمنحني الذي معادلتاه الطبيعيتان :

أ - $\kappa = \dfrac{1}{\sqrt{2s}} \quad , \quad \tau = 0$

ب - $\kappa = a\cos s \quad , \quad \tau = a\sin s$

43 - أوجد المعادلتين الطبيعيتين للسلسلي :

$$r(t) = \left(a\,\mathrm{ch}\,\frac{t}{a} \,,\, t \,,\, 0 \right) \qquad , \qquad a = const.$$

44 - أثبت أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون المنحني :

$$x = at$$

$$y = bt^2$$

$$z = t^3$$

لولباً معمماً هو أن يكون :

$$2b^2 = 3a$$

45 – ليكن:

$$s \to r(s)$$

تمثيلاً من الصف C_4 لمنحن $\mathscr{L}$. أثبت أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون المنحني لولباً معمماً ، هو أن يحقق المتطابقة :

$$\frac{d^2 r}{ds^2} \cdot \frac{d^3 r}{ds^3} \cdot \frac{d^4 r}{ds^4} = 0$$

(إرشاد : عبر عن $\frac{\tau}{\kappa}$ بدلالة r ومشتقاته واشتق المعادلة $\frac{\tau}{\kappa} = const.$)

46 – أثبت أن المسافة بين أية نقطتين متقابلتين ، من منحنيي برتراند ثابتة وأن زاوية مماسي المنحنيين في نقطتين متقابلتين ، ثابتة أيضاً .

47 – أثبت أن تقوس والتفاف دليل المماسات لمنحن $s \to r(s)$ تقوسه κ، والتفافه τ يعطيان بالعلاقات :

$$\kappa_1^2 = \frac{\kappa^2 + \tau^2}{\kappa^2}$$

$$\tau_1 = \frac{\tau \dot{\kappa} - \kappa \dot{\tau}}{\kappa (\kappa^2 + \tau^2)}$$

48 – أثبت أن تقوس والتفاف دليل ثنائي الناظم (الدليل الكروي لـ b) للمنحني

$$s \to r(s)$$

يعطيان بـــ :