1

المحاضرة التاسعة عشر (بنى (3))

لتكن M مودول على A:

$M \cong A^{(S)} \Leftrightarrow$ M لـ S قاعدة

الإثبات ($\Rightarrow$): لنفرض أن S قاعدة لـ M ولتكن $S_i \in S$

ولنأخذ العلاقة: $\varphi : A^{(S)} \longrightarrow M$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_t \longrightarrow \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_t S_t$$

لنثبت أن φ تماثل:

واضح أن φ تطبيق وشامل ولنثبت أنه غامر:

$$\forall m \in M \Rightarrow m = \sum_{S_i \in S} \alpha_i S_i$$

وذلك لكون S قاعدة

وبالتالي: $(\alpha_S)_S \in S \in A^S$

$\Rightarrow \varphi(\alpha_S) = m$

Scanned by CamScanner

φ تباين لأن كمستقلة، بالتالي: إذا كان $\sum_{s\in S} \alpha_s s_i$ ؛
وكون كمستقلة فإن:

$$\alpha_s = 0 \ \forall s \in S \Rightarrow \ker\varphi = \{0\}$$

ومنه φ تباين

$\Rightarrow$ لبرهن أن $M \cong A^{(S)}$

ولنثبت أن كقاعدة لـ M

إن $\{e_s\}_{s\in S}$ بحيث:

$$e_s = (e_{s,i})_i \longrightarrow \begin{cases} 1 & i = s \\ 0 & i \neq s \end{cases}$$

($\{e_s\}_{s\in S}$ قاعدة لأنها مولدة ومستقلة (لا نثبت ذلك))

$\varphi : A^{(S)} \longrightarrow M$ تماثل

ولدينا $\{e_s\}_{s\in S}$ قاعدة لـ $A^{(S)}$

ولنثبت أن $\{\varphi(e_s) : s\in S\}$ (*) = قاعدة لـ M

وهي مولدة لأن:

$$m \in M \Rightarrow \varphi^{-1}(m) \in A^{(S)}$$

ومنه كون $\{e_s\}_{s\in S}$ قاعدة لـ $A^{(S)}$

وبالتالي: $\varphi^{-1}(m) = \sum_{s\in S} \alpha_s \varphi_s$

وكون φ تشاكل فإن:

$$m = \sum_{s\in S} \alpha_s \varphi(e_s)$$

وبالتالي: (*) مولدة لـ M

وكذلك (*) مستقلة لأن:

$$\sum_{s\in S} \alpha_s \varphi(e_s) = 0 \Rightarrow \varphi\left(\sum_{s\in S} \alpha_s e_s\right) = 0$$

متباين

$\sum \alpha_s e_s = 0$: ولكن ϕ متباينة إذاً

ولكن : $\{e_s\}_{s\in S}$ قاعدة ، بالتالي :

$\alpha_s = 0 \; , \forall s \in S$

المودولات المنتهية التوليد :

تعريف : لتكن M مودول على A عنصر :

M منتهية التوليد $\Leftrightarrow$ M على A مولدة منتهية S

$\langle S \rangle = M$ بحيث

$S = \{s_1, \dots, s_n\}$ أي

مثال : (*) A مودول على A ، بالتالي A منتهي التوليد لأن :

$A = \langle 1 \rangle$

(**) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ولنأخذ $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ مرة}} = A^n$

ان A^n مودول على A ، كذلك نجد :

$\{ e_1 = (1, 0, \dots, 0) \; , e_2 = (0, 1, 0 \dots 0), \dots, e_n = (0, 0 \dots, 0, 1) \}$

قاعدة لـ A^n وعدد عناصرها n ، بالتالي A^n منتهي التوليد

(*) ولنأخذ $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ وهو منتهي التوليد لأن : $G = \langle 1 \rangle$

مثالث وجاهز ، الحالة A تبديلية وحيدية .

لنتوقف للحاضرة

Samir

Scanned by CamScanner