التحليل 3

الدكتور: يحيى قطيش

المحاضرة : السابعة عشر عشر

التاريخ : ٢٠١٦/١٢/٧

إعداد : نذير تيناوي

مبرهنة (٤) : إذا كان التابعان $f(x,t)$ و $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ مستمرين من أجل $x \geq a$ و $t_1 \leq t \leq t_2$ و كان التكامل $F(t) = \int_a^\infty f(x,t)dx$ متقارب ، فإن قاعدة لايبنتز صحيحة أي يكون :

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_a^\infty f(x,t)dx = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$$

من أجل t تحقق أن $t_1 \leq t \leq t_2$ شريطة أن يكون التكامل $\int_a^\infty \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$ متقارب بانتظام بالنسبة لـt

مثال: احسب قيمة التكامل :

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx$$

مناقشة إضافية☺ (لتوضيح فكرة الحل) :

إن هذا التكامل تابع للوسيطين α,β و نلاحظ أن مشكلة هذا التكامل هو وجود المقدار $\frac{\sin\beta x}{x}$ حيث نعلم أنه من الصعب بمكان إيجاد الدالة الأصلية لهذا التابع كونه لا يُعبر عن تابعه الأصلي بدلالة توابع أولية

-من جهة أخرى سيصبح التكامل سهلاً لو استطعنا التخلص من x في المقام و لكن كيف !!

- لو قمنا اشتقاق دالة المكاملة بالنسبة للوسيط β فإن :

$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\sin(x\beta)}{x}\right) = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial\beta}\sin(x\beta) = \frac{1}{x}(x\cos\beta x) = \cos\beta x$ إذاً اشتقاقنا للتابع بالنسبة للوسيط β كان مناسباً للتخلص من x بالمقام .

- و لكن اشتقاق مضمون التكامل بالنسبة لأحد الوسيطين هو تطبيق مباشر للمبرهنة السابقة و هي صحيح في شروط معينة ، لنتحقق منها : ((الوسيط α لا يحدث أي تغيير فسنعتبر التكامل تابعاً للوسيط β))

مثال:

لدينا $f(x,\beta) = \frac{e^{-\alpha x}\sin\beta x}{x}$ مستمر حيث $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\beta x}{x} = \beta \neq 0$ كما أن :

$$\frac{\partial f(x,\beta)}{\partial\beta}=e^{-\alpha x}cos\beta x$$

و هو مستمر أيضاً .

و لنثبت أن التكامل $I(\alpha,\beta)=\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\frac{sin\beta x}{x}dx$ متقارب مهما كانت β فإنه من أجل كل $\varepsilon>0$ يوجد $\underbrace{K_\varepsilon\geq\frac{1}{\varepsilon}}_{\text{نختاره بعد الحل}}$ بحيث يكون :

$$\left|\int_\eta^{\infty}e^{-\alpha x}\frac{sin\beta x}{x}dx\right|\leq\left|\int_\eta^{\infty}e^{-\alpha x}\frac{1}{\eta}dx\right|\leq\frac{1}{\eta}\int_\eta^{\infty}e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha\eta e^{\alpha\eta}}<\frac{1}{\eta}<\varepsilon$$

أي $\eta>K_\varepsilon>\frac{1}{\varepsilon}$

فالتكامل متقارب بانتظام في كل نقطة تحقق $\eta>K_\varepsilon$.

كما أن التكامل $\int_a^{\infty}\frac{\partial f(x,\beta)}{\partial\beta}dx=\int_a^{\infty}e^{-\alpha x}cos\beta x\,dx$ لأنه يوجد لكل $\varepsilon>0$ عدد $K_\varepsilon>K_1$ بحيث يكون :

$$\left|\int_\eta^{\infty}e^{-\alpha x}cos\beta x\,dx\right|\leq\left|\int_\eta^{\infty}e^{-\alpha x}dx\right|=\left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\right]_{x=\eta}^{\infty}=\frac{1}{\alpha e^{\alpha\eta}}<\varepsilon$$

و

$$\frac{1}{\alpha e^{\alpha\eta}}<\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{\alpha\varepsilon}<e^{\alpha\eta}\Rightarrow\ln\left(\frac{1}{\alpha\varepsilon}\right)<\alpha\eta\Rightarrow\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1}{\alpha\varepsilon}\right)<\eta$$

إذاً نختار $\eta>K_1>\frac{1}{\alpha}\ln(\frac{1}{\alpha\varepsilon})$

جميع شروط لايبتنز محققة لذلك يمكننا تطبيق قاعدة لايبتنز على التكامل المعتل :

$$\frac{\partial I(\alpha,\beta)}{\partial\beta}=\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(e^{-\alpha x}\frac{sin\beta x}{x}\right)dx=\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}cos\beta x\,dx$$

و التكامل الأخير يمكن حسابه بطريقة التجزئة و بخطوات بسيطة نصل إلى أن :

$$\frac{\partial I(\alpha,\beta)}{\partial\beta}=\left[e^{-\alpha x}\frac{\beta\sin\beta x-\alpha\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}\right]_0^{\infty}=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$

نكامل بالنسبة لـ β:

$$I(\alpha,\beta)=\int\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}d\beta=\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+c\ldots(*)$$

حيث c تابع إلى β و يمكن حسابه كما يلي

من التكامل الأصلي لدينا :

$$I(\alpha,0)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x}\sin(0x)}{x}dx=0$$

و من $(*)$ لدينا :

$$I(\alpha,0)=\arctan(0)+c=c$$

بالمقارنة نجد أن $c=0$ و عليه :

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

نتائج :

أولاً :

$$\lim_{\alpha\to0}\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & :\beta>0\\ -\frac{\pi}{2} & :\beta<0\\ 1 & :\beta=0\end{cases}$$

ثانياً : التكامل

$$I(0,\beta)=\int_0^{\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx$$

متقارب و يساوي $\lim_{\alpha\to0}I(\alpha,\beta)$ أي :

$$I(\beta)=\int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & :\beta>0\\ -\frac{\pi}{2} & :\beta<0\\ 1 & :\beta=0\end{cases}$$

ثالثاً : عندما $\beta=1>0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

و يدعى تكامل ديركليه .

كما أسلفنا في بداية البحث أنه من الممكن أن يكون حدود التكامل تابعة للوسيط t و لندرس هذه الحالة :

مبرهنة(٥) :

إذا كان التابع $f(x,t)$ تابع مستمر على المستطيل $R=[a,b]\times[t_1,t_2]$ بالإضافة إلى أن $a(t),b(t)$ تابعين مستمرين من أجل $t_1\le t\le t_2$ و لهما مشتقان مستمران بالنسبة لـ t على المجال المذكور فإن التكامل $F(t)=\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx$ تابع مستمر بالنسبة لـ t من المجال $[t_1,t_2]$

الإثبات :

لنضع $x=a(t)+[b(t)-a(t)]y$ عندئذٍ نلاحظ أن :

$$x=a(t)\Rightarrow a(t)=a(t)+[b(t)-a(t)]y\Rightarrow y=0$$
$$x=b(t)\Longrightarrow b(t)=a(t)+[b(t)-a(t)]y\Longrightarrow y=1$$

$$F(t)=\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx=\int_0^1 g(y,t)dy$$
$$:g(y,t)=f(a(t)+[b(t)-a(t)]y,t)$$

و لما كان $g(y,t)$ تابعاً تابعاً مستمراً على المستطيل $[t_1,t_2]\times[0,1]$ فإنه و حسب المبرهنة (١) يكون $F(t)$ مستمر بالنسبة للوسيط t.

مبرهنة (٦) : ((تعميم قاعدة لايبتنز))

إذا كان التابع $f(x,t)$ مستمراً و كان له مشتقاً جزئياً مستمراً $\frac{\partial f}{\partial t}$ في المستطيل المغلق $[a,b]\times[t_1,t_2]$ و كان التابعان $a(t),b(t)$ معرفين و قابلين للاشتقاق و مشتقاتهما مستمرة على المجال $[t_1,t_2]$ فإن مشتق التابع $F(t)$ يعطى بالدستور :

$$\frac{dF(t)}{dt}=\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx+f(a(t),t)\frac{da}{dt}-f(b(t),t)\frac{db}{dt}$$

البرهان :

إن التابع F تابع للوسيط t و هو يتغير إذا تغيرت t في الدالة المكاملة $f(x,t)$ أو إذا تغير أحد التابعين $a(t),b(t)$ فهو بشكل آخر تابع لكل من t,a,b لذا يمكن أن نكتب :

$F(t)=\varphi(t,a,b)$ و حسب قاعدة الاشتقاق للتوابع المركبة (مرت بالمرحلة الثانوية باسم قاعدة السلسلة) :

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}\underbrace{\frac{dt}{dt}}_{=1}+\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{db}{dt}$$

و لكن نعلم أن $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$

و أيضاً حسب قاعدة اشتقاق التكامل بالنسبة لحده الأعلى (و الأدنى) يكون :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}=-f(a(t),t)\,,\frac{\partial\varphi}{\partial b}=f(b(t),t)$$

بتعويض كل ما سبق :

$$\frac{dF(t)}{dt}=\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx+f(a(t),t)\frac{da}{dt}-f(b(t),t)\frac{db}{dt}$$

تمرين محلول :

احسب التكامل :

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$$

لنعرف التابع :

$$F(t) = \int_0^t \frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}dx$$

فنلاحظ أن $F(1) = J$ و لكون شروط لايبنتز محققة نكتب :

$$\frac{dF}{dt} = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}\right)dx + \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} - 0$$

$$= \int_0^t \left(\frac{x}{1+tx}\right)\frac{dx}{1+x^2} + \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}$$

و لنفرق الكسر في دالة المكاملة إذ نكتب :

$$\frac{x}{(1+tx)(1+x^2)} = \frac{A}{1+tx} + \frac{Bx+c}{1+x^2}$$

$$A = \lim_{x\to -\frac{1}{t}}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = \frac{-\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}} = -\frac{t}{1+t^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(1+tx)(1+x^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{Ax}{1+tx} + \lim_{x\to\infty}\frac{Bx^2+Cx}{1+x^2}$$

$$0 = \frac{A}{t} + B \Rightarrow B = -\frac{A}{t} = \frac{1}{1+t^2}$$

لحساب C نضع: $x = 0$:

$$0 = A + C \Rightarrow C = \frac{t}{1+t^2}$$

إذن :

$$\frac{x}{(1+tx)(1+x^2)}=\frac{\left(-\frac{t}{1+t^2}\right)}{1+tx}+\frac{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)x+\frac{t}{1+t^2}}{1+x^2}$$
$$=\frac{1}{1+t^2}\left[-\frac{\mathrm{t}}{1+tx}+\frac{x+t}{1+x^2}\right]$$

نعوض في التكامل و نكامل :

$$\frac{dF}{dt}=-\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}+\frac{1}{2}\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}+t\frac{arctan(t)}{1+t^2}+\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}+t\frac{arctan(t)}{1+t^2}$$

نكامل :

$$F(t)=\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}dt+\int_0^t\frac{t}{1+t^2}\underbrace{arctant}_{u}\,dt$$

لحساب التكامل الأخير نطبق التكامل بالتجزئة إذ نفرض $\mathrm{u}=arctant$ و $dv=\frac{t}{1+t^2}$ فنجد أن :

$$F(t)=\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}dt+\left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\,arctant\right]_0^t-\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\,arctant$$

الآن :

$$J=F(1)=\frac{1}{2}\ln(2)\frac{pi}{4}=\frac{pi}{8}\ln(2)$$

"انتهت المحاضرة "

نذير تيناوي