البنى الجبرية 1

الدكتور: حمزة الحاكمي

المحاضرة : الرابعة والعشرون

التاريخ : ٢٠١٦/١٢/١٣

إعداد : أحمد أبو التوت

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

مبرهنات سيلوف :

ذكرنا سابقا أنه عكس لاغرانج بالحالة العامة غير صحيح أي أنه إذا كانت G زمرة منتهية ومرتبتها n وكان m عدد صحيح موجب يقسم n فإنه ليس بالضرورة وجود زمرة جزئية في G مرتبتها m

إن المبرهنة التالية هي واحدة من الحلات الخاصة التي يكون فيها عكس مبرهنة لاغرانج صحيحة .إن مبرهنة سيلوف الأولى ستعطي الشرط الازم لوجود هذه زمرة جزئية .

مبرهنة سيلوف الأولى :

لتكن G زمرة منتهية ومرتبتها تقبل القسمة على P^k بحيث $k > 0$ عدد صحيح عندئذ يوجد في G زمرة جزئية مرتبتها P^k .

الاثبات :

سنبرهن بالاستقراء حسب مرتبة G لنفرض أن $(G:1) = P^k.n$

إذا كانت $(G:1) = 1$ يتم المطلوب والمبرهنة صحيحة .

لنفرض أن هذه المبرهنة صحيحة من أجل جميع الزمر التي مراتبها أصغر من مرتبة G نميز حالتين :

١) يوجد في G زمرة جزئية $H \subsetneq G$ ومرتبتها تقبل القسمة على P^k عندئذ H تحوي زمرة جزئية مرتبتها P^k وبالتالي G تحوي زمرة جزئية مرتبتها P^k وحسب الفرض الاستقرائي يتم المطلوب .

٢) مراتب جميع الزمر الجزئية المحتواة تماماً في G لا تقبل القسمة على P^k عندئذ حسب علاقة الصفوف فإن

$$(G:1) = (Z(G):1) + \sum_{a \notin Z(G)} \big(G:c(a)\big) \quad (*)$$

وكون $c(a)$ هي زمرة جزئية في G فإن $(c(a):1)$ فهي لا تقبل القسمة على P^k وبالتالي وحسب لاغرانج فإن :

$$p^k.n = (G:1) = (\big(G:c(a)\big)(c(a):1))$$

نجد أن $\big(G:c(a)\big)$ يقبل القسمة على P^k وذلك لأجل جميع العناصر $a \notin Z(G)$

$$(Z(G):1) = (G:1) - \sum_{a \notin Z(G)} \big(G:c(a)\big)$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن من المساواة يقبل القسمة على P ومنه $(Z(G):1)$ يقبل القسمة على P ومنه فإن $Z(G)$ تبديلية ومنتهية فإن $Z(G)$ تحوي عنصر مرتبته P وليكن $x \in Z(G)$

وأن : $< x > \subseteq Z(G) \subseteq G$

نعلم أن $Z(G)$ تبديلية وناظميه في G ومنه $< x >$ ناظمية في $Z(G)$ ولكن ليس بالضرورة أن تكون

$< x >$ ناظمية في G وأن $(< x >: 1) = P$

لنبرهن على أن $< x >$ناظمية فيG

$$\forall g \in G \ ; g < x > g^{-1} \subseteq G$$

ليكن $b \in g < x > g^{-1}$ عندئذ

$$b = g.x^m.g^{-1} = (g.x.g^{-1})^m = (\underbrace{x.g}_{x \in Z(G)} .g^{-1})^m = .x^m$$

ومنه فإن $< x >$ناظمية في G .

ومنه زمرة الخارج $\frac{G}{< x >}$ معرفة فنجد أن :

$$\left(\frac{G}{< x >} : 1\right) = (G: < x >) = \frac{(G:1)}{(< x >: 1)} = \frac{P^k.n}{P} = P^{k-1}.n$$

ومنه فإن $\frac{G}{< x >}$ زمرة مرتبتها $P^{k-1}.n$ وحسب الفرض الاستقرائي فإن $\frac{G}{< x >}$ تحوي زمرة جزئية مرتبتها P^{k-1}

ولتكن $\frac{K}{< x >}$ حيث K زمرة جزئية في G و $< x > \subseteq K$

$$(K:1) = (K: < x >)(< x >: 1)$$

$$= \left(\frac{K}{< x >} : 1\right)(< x >: 1) = P^{k-1}.P = P^k$$

وجدنا أن K زمرة جزئية مرتبتها p^k إذا الحالة (2) غير موجودة لأنها تناقض كون كل الزمر الجزئية في G لاتقبل القسمة على P^k .

(عندما k=1 تدعى المبرهنة السابقة بمبرهنة كوشي)

تمرين :

كل زمرة منتهية مرتبتها 4 إما تماثل Z_4 أو $Z_2 \oplus Z_2$

الاثبات :

لتكن G زمرة منتهية وإن $(G:1) = 4$ أن G تبديلية لأن $(G:1) = 2^2$

- إذا كانت G دوارة فإن $G \cong Z_4$
- لنفرض أن G ليست دوارة حسب المبرهنة السابقة فإن G تحوي زمرة جزئية مرتبتها 2 ولتكن K

إن K دوارة وبالتالي $K =< a >$: $a \in K$ ومنه $K \subsetneq G$ اي يوجد $b \in G$ بحيث $b \notin K$

ولنضع $H =< b >$ وأن H دوارة مولدة بالعنصر مرتبتها 2 أي أن $(H:1) = 2$ حيث
أن H زمرة جزئية في G فإن مرتبتها تقسم مرتبة G
ومنه $H = \{e, b\}$ $\quad$ $\mathrm{K} = \{e, a\}$
إن كل H, K ناظمية في G حسب نص سابق ((كل زمرة منتهية مرتبتها P^2 تكون تبديلية))

ومنه $H.K$ زمرة جزئية في G .

وأن $K \cap H =< e >$ لأن إذا كان $y \in K \cap H$

ولنفرض جدلا ان $y \neq e$ وأيضا :

$$y^2 = e \; ; y \in K$$
$$y^2 = e \; ; y \in H$$

ومنه $y = y^{-1}$ ومنه فإن: $o(y) = 2$ وبالتالي $y = b \in K$ وهذه تناقض ومنه

$$K \cap H =< e >$$

ونعلم أن

$$(H.K:1) = \frac{(H:1).(K:1)}{(K \cap H:1)}$$ قانون حفظ

$$(H.K:1) = (H:1).(K:1) = 4$$

$$G = K \times H \cong K \oplus H \cong Z_2 \oplus Z_2$$

ومنه اذا كانت دوارة فهي تماثل Z_4

واذا لم تكن دوارة فهي تماثل $Z_2 \oplus Z_2$

تمرين : لتكن G زمرة مرتبتها P^2 أثبت انه اما $G \cong Z_{P^2}$ أو $G \cong Z_P \oplus Z_P$ (تعميم للمثال السابق)

البرهان : (وظيفة)

- لنفرض أن $(G:1) = P^2$ حيث P عدد أولي كل زمرة مرتبتها P^2 فهي تبديلية إن G تبديلية طالما $P \neq 1$ عدد أولي يوجد عنصر $a \in G$ وأن $a \neq e$ عندئذ :

$K =< a >$ زمرة جزئية ناظمية في G وحسب لاغرانج إن كانت الزمرة G دوارة عندئذ G تماثل Z_{P^2} ومنه يتم المطلوب .

- لنفرض ان الزمرة G ليست دوارة وفي هذه الحالة فإن $o(K) \neq P^2$ لأنه لو كانت تساوي P^2 ستكون $G =< K >$ ونحن في حالة أننا فرضنا كون G ليست دوارة وحسب لاغرانج نجد ان $\underbrace{(K:1) = P}_{\text{دوارة ومرتبتها } P}$

وبما ان $K \subsetneq G$ فإنه يوجد $b \in G$ بحيث $b \notin K$ لنأخذ الزمرة $H =< b >$ إن الزمرة H زمرة جزئية ناظمية في G وأن $(H:1) = P$ كما ان $H.K$ زمر جزئية في G وأن $H \cap K =< e >$ لأنه إذا كان $y \in H \cap K$ وأن $y \neq e$.

بفرض أن $o(y) = \alpha$ نجد ان $y^P = e$, $y \in K$ ومنه α يقسم P وبالتالي $\alpha = 1$

وهذا غير ممكن أن يكون $y \neq e$

$$G = H.K \cong H \times K \cong Z_P \oplus Z_P$$

تمرين : لنأخذ الزمرة $U(16)$ و كلاً من $H = \{1,15\}$ و $K = \{1,9\}$

هل H, K متماثلين وهل G/H و G/K متماثلتين .

الحل : $G = U(16) = \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$

- إن $H \cong Z_2$ و $K \cong Z_2$ ومن لإنه $H \cong K$ لأن لهما نفس المرتبة .
- إن G/H زمرة مرتبتها 4

نعلم أن $H = 15H$ لأن $15 \in H$

لنوجد باقي المرافقات

$$3H = \{3,13\}$$

$$5H = \{5,11\}$$

$$7H = \{7,9\}$$

$$9H = \{9,7\}$$

$$11H = \{11,5\}$$

$$13H = \{13,3\}$$

وبالتالي

$$3H = 13H$$

$$5H = 11H$$

$$7H = 9H$$

$$\frac{G}{H} = \underbrace{\{H, 3H, 5H, 7H\}}_{\text{المرافقات}}$$

$$(3H)^2 = 9H = 7H$$

$$(3H)^3 = 11H = 5H$$

ومنه الزمرة $\frac{G}{H}$ مولدة بالنصر $< 3H >$ ومنه $\frac{G}{H} =$

$$\frac{G}{H} \cong Z_4$$

بشكل مماثل نجد أن

$$\frac{G}{K} \cong Z_4$$

ومنه

$$\frac{G}{H} \cong \frac{G}{H}$$

Syria Math

تعريف : لتكن G زمرة مرتبتها nP^k وأن n لايقبل القسمة على p اي أن p^{k+1} لا يقسم مرتبة G نسمي كل زمرة جزئية فيG مرتبتها P^k **p – زمرة جزئية سيلوفية** في G .

بمعنى أخر أي أن p – زمرة جزئية سيلوفية هي أكبر , p – زمرة جزئية في G

مثال : لتكن G زمرة مرتبتها $(G:1) = 2^3.3^2.5^4$

الحل : إن G تحوي

2 – زمرة جزئية مرتبتها 2

2^2 – زمرة جزئية مرتبتها 2

2^3 – زمرة جزئية مرتبتها 2

3 – زمرة جزئية مرتبتها 3

3^2 – زمرة جزئية مرتبتها 3

5 – زمرة جزئية مرتبتها 5

5^2 – زمرة جزئية مرتبتها 5

5^3 – زمرة جزئية مرتبتها 5

5^4 – زمرة جزئية مرتبتها 5

2–زمرة جزئية سيلوفية في G ومرتبتها 8 .

3–زمرة جزئية سيلوفية في G ومرتبتها 9 .

5–زمرة جزئية سيلوفية في G ومرتبتها 625 .

ملاحظة : كل زمرة جزئية مرتبتها تقبل القسمة على عدد أولي p تحوي زمرة سيلوفية .

"انتهت المحاضرة "

Syria Math