نظرية الاحتمالات

محاضرة $\boxed{16}$ / /

العزوم :

تعريف : ليكن Y متغيراً عشوائياً كثافته الاحتمالية $f_Y(y)$

وليكن $r \geq 1$ عدداً صحيحاً ، إذا وجد لـ Y^r توقعاً فإننا

ندعوه : العزم من المرتبة r ونعطى بـ :

$$m_r := E(Y^r) = \begin{cases} \sum_y y^r f_Y(y) \; ; & Y \text{ منقطع} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y^r f_Y(y)\, dy \; ; & Y \text{ مستمر} \end{cases}$$

نلاحظ أنه من أجل $r=1$ نحصل على التوقع $\boxed{\mu = E(Y)}$

نتيجة : بما أن $|Y|^{r-1} \leq |Y|^r$

فهذا يعني أنه إذا وجد العزم من المرتبة r فإن العزوم من المرتبة الأصغر من r يكون موجوداً.

$E|Y^r| < +\infty$

$E|Y|^{r-1} \leq E|Y|^r < +\infty$

$\leq +\infty$

تعريف : العزم المركزي من المرتبة r :

وهو العزم المركزي من المرتبة r حول $\mu = EY$

ونعطى بـ : $E(Y - E(Y))^r = E(Y-\mu)^r$

$$= \begin{cases} \sum_y (y-\mu)^r f_Y(y) \; ; & Y \text{ منقطع} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (y-\mu)^r f_Y(y)\, dy \; ; & Y \text{ مستمر} \end{cases}$$

مثال: ليكن Y متغيراً عشوائياً كثافته الاحتمالية:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y) & ; \quad 0 < y < 1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $E(Y^r)$ واستنتج $E(2Y+1)^2$

الحل: نلاحظ أن Y متغير عشوائي مستمر بالتالي:

$$E(Y^r) = \int_{-\infty}^{\infty} y^r f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_0^1 y^r \cdot 2(1-y)\, dy$$

$$= 2\left(\left[\frac{y^{r+1}}{r+1} - \frac{y^{r+2}}{r+2}\right]_0^1\right)$$

$$\Rightarrow E(Y^r) = 2\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right)$$

$$= \frac{2}{(r+1)(r+2)}$$

$$E(2Y+1)^2 = E\left[4Y^2 + 4Y + 1\right]$$

$$= 4EY^2 + 4EY + 1$$

$$= 4\left[\frac{2}{(2+1)(2+2)}\right] + 4\left[\frac{2}{(1+1)(1+2)}\right] + 1$$

$$= 3$$

التباين والانحراف المعياري وخواصهما :

تعريف : ليكن Y متغيراً عشوائياً له عزماً من المرتبة الثانية (أي أن $E|Y|^2 < +\infty$) فإننا نعرف تباين المتغير العشوائي Y بـ:

$$\sigma_Y^2 = Var(Y) = V(Y) = E(Y - E(Y))^2$$

ومن أجل $E(Y) = \mu$ فإنه:

$$\boxed{V(Y) = E(Y - \mu)^2}$$

وهو العزم المركزي من المرتبة الثانية حول μ وهو يمثل متوسط مربعات انحراف القياسات عن متوسطها

تعريف: نعرف الانحراف المعياري لـ Y بـ:

$$\boxed{\sigma_Y := \sqrt{V(Y)}}$$

الجذر الموجب لتباين Y

الصيغة المختزلة للتباين:

$$V(Y) = EY^2 - (EY)^2$$

$$= \boxed{EY^2 - \mu^2}$$

البرهان : من التعريف:

$$V(Y) = E(Y - \mu)^2$$

$$= E(Y^2 - 2\mu Y + \mu^2)$$

$$= EY^2 - 2\mu EY + \mu^2$$

لأنه ثابت له توقع

لأن μ ثابت

$$\Rightarrow V(Y) = EY^2 - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$\boxed{V(Y) = EY^2 - \mu^2}$$

خواص التباين:

ثابت

$V(c) = 0 \quad ; \quad \forall c \in R$ ①

$V(c.Y) = c^2 \cdot V(Y) \quad ; \quad \forall c \in R$ ②

البرهان:

$V(c.Y) = E(c.Y)^2 - (E(c.Y))^2$

$= c^2 . EY^2 - (cEY)^2$

$= c^2 [EY^2 - EY^2] = c^2 . V(Y)$

نتيجة من ②:

$\sigma_{c.Y} = |c| . \sigma_Y$

$V(aY + b) = a^2 . V(Y) \quad ; \forall a.b \in R$ ③

$V(Y) \leq E(Y - a)^2 \quad ; \forall a \in R$ ④

البرهان:

$(Y-a)^2 = (Y - EY + EY - a)^2$

$= (Y - EY)^2 + (EY - a)^2 + 2(Y - EY)(EY - a)$

$\Rightarrow E(Y-a)^2 = E(Y - E)^2 + E(EY - a)^2 +$ ثابت . ثابت

$E(2(Y - EY).(EY - a))$

$\Rightarrow \underbrace{E(Y-a)^2}_{\text{موجب} \geq 0} = \underbrace{V(Y)}_{\text{موجب} \geq 0} + \underbrace{(EY - a)^2}_{\text{موجب} \geq 0} + 0 \quad = 0$

$\boxed{\Rightarrow E(Y-a)^2 \geq V(Y)}$

$E(2(Y - EY).(EY - a))$

$2.(EY - a)(E(Y - EY))$

ثابتة $\quad EY - E(EY)$

ثابت

ثابت $(EY - EY)$

$= 0$

تمرين: المتغير المعياري:

ليكن Y متغيراً عشوائياً توقعه μ وتباينه σ^2 عندئذ يسمى المتغير التالي:

$$Z = \frac{Y - \mu}{\sigma}$$

متغيراً عشوائياً معيارياً ويكون توقعه صفراً وتباينه واحد

البرهان:

$$E(Z) = E\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} E(Y - \mu)$$

$$= \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu) = 0$$

$$V(Z) = V\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} V(Y - \mu)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left[V(Y) - V(\mu)\right] = \frac{1}{\sigma^2}\left[\sigma^2 - 0\right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

التغاير وخواصه:

تعريف: ليكن X , Y متغيرين عشوائيين لكل منهما توقع منته ول $(X . Y)$ ~~للجداء~~ للجداء توقع منتهٍ عندئذٍ:

نعرف التغاير بين X , Y بـ:

$$cov(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY)$$

$$= \sigma_{XY}$$

الصيغة المختزلة لحساب التغاير:

$$cov(X, Y) = \boxed{E(X . Y) - EX\,EY}$$