* أوجد تقوس اللولب ومركز تقوسه (وظيفة)

م.23: التفاف منحنٍ: الالتفاف لمنحنٍ هو معدل دوران المستوي الملاصق أثناء الحركة على المنحني بالنسبة لطول القوس.

* بما أن $\vec{b}$ عامودي على المستوي الملاصق فإن الالتفاف هو معدل دوران $\vec{b}$ بالنسبة لطول قوس.

ملاحظة: المستوي الملاصق لمنحنٍ مستوٍ غير مستقيم هو المستوي ذاته والالتفاف لهذا المنحني ينعدم في جميع نقاطه. (لأنه معدل دوران المستوي ملاصق لا يدور وهو نفس المنحني المستوي.)

مبرهنة: يوجد في كل نقطة نظامية وغير معوّقة للمنحني الممثل بـ $\vec{r}(s) \leftarrow s$ من الصف C^3 والقابل حساب لـ τ المعطى في علاقات فرينيه.

مبرهنة: إذا كانت p نقطة نظامية وغير معوقة من منحنٍ ممثله $\vec{r}(s) \leftarrow s$ من الصف C^3 فإن التفاف المنحني عند نقطة p يعطى بالمساواة التالية:

$$\tau = \frac{[\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''']}{K^2}$$

نقطة نظامية وغير معوقة لتضمن وجود المستوي ملاصق وعدم انعدام التقوس

مبرهنة: إذا كانت p نقطة نظامية وغير معوقة لمنحنٍ ممثله $\vec{r}(t) \leftarrow t$ من الصف C^3 فإن الالتفاف للمنحني عند نقطة p يعطى بالمساواة التالية:

$$\tau = \frac{[\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''']}{\|\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,''\|^2}$$

تمرين: عين ثلاثية فرينيه و التقوس و الالتفاف للولب

الممثل بـ $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$

ثم دائرة التقوس عند النقطة الموافقة لـ $t=0$

الحل:

$$\vec{t} = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{(-a\sin t, a\cos t, b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{t} = \left(\frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\vec{b} = \frac{\vec{r}' \wedge \vec{r}''}{\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\|}$$

$$\vec{r}''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$$

$$r' \wedge r'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$$

$$\|r' \wedge r''\| = \sqrt{a^2b^2 + a^4} = a\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \vec{b} = \left(\frac{b\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-b\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

لو كان لدينا مستوي والتقوس ثابت عندها يكون دائرة

$\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$

$\vec{b}, \vec{t}, \vec{n}$

$$\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t}$$

حسب النظام الأساسي

$$= \frac{1}{a^2+b^2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b\sin t & -b\cos t & a \\ -a\sin t & a\cos t & b \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left(-(a^2+b^2)\cos t, -(a^2+b^2)\sin t, 0\right)$$

$$= (\cos t, -\sin t, 0)$$

التقوس لا يتغير بتغير النقطة أي ثابت.

$$K = \frac{\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\|}{\|\vec{r}'\|^3} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(\sqrt{a^2+b^2})^3} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

لو تقوس والالتفاف عندنا ثابت عندها نحسب r' و r'' كدالة t

$$\tau = \frac{[\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''']}{\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\|^2} =$$

$$\vec{r}'''(t) = (a\sin t, -a\cos t, 0)$$

$$[\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}'''] = (\vec{r}' \wedge \vec{r}'') \cdot \vec{r}'''$$

$$= (ab\sin t, -ab\cos t, a^2)(a\sin t, -a\cos t, 0)$$

$$= (a^2 b\sin^2 t + a^2 b\cos^2 t + 0) = a^2 b$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{a^2 b}{(a\sqrt{a^2+b^2})^2} = \frac{b}{a^2+b^2}$$

وهو ثابت في جميع نقاط اللولب

أي منحني حاصل قسمة τ على K أو العكس وكان ثابت عندها المنحني في $\mathbb{R}^3$ هو اللولب.

المنحني في الفراغ يحتاج إلى معادلتين لتعيينه

الدائرة الواقعة في الفراغ ليس بالضرورة أن تكون في مستوى أفقي

$$\frac{k}{\tau} = \frac{a}{b}$$

حيث a نصف قطر الاسطوانية و b هي خطوة اللولب.

* النقطة P_0 الموافقة لـ $t=0$ هي رأس المنحنى

$$\vec{r}(0) = (a, 0, 0)$$

المستوى الملاصق للولب عند $P_0(a,0,0)$،

حيث Q نقطة $[\overrightarrow{P_0Q}, \vec{r}'(0), \vec{r}''(0)] = 0$

كيفية في المستوى: $\overrightarrow{P_0Q} \cdot (\vec{r}'(0) \wedge \vec{r}''(0)) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0 & a & b \\ -a & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-a(by - az) = 0$$

و a هو مقدار موجب

$$\Rightarrow \boxed{by - az = 0} \quad —①$$

معادلة مستوى ملاصق عند P_0

المستوى الملاصق له تلامس من مرتبة ثانية على الأقل

معادلة دائرة التقوس للمنحنى هي تقاطع معادلة مستوى الملاصق في P_0 مع الكرة التي مركزها مركز تقوس ونصف قطرها مقلوب التقوس.

* تعيين الكرة:

$$(X - x_c)^2 + (Y - y_c)^2 + (Z - z_c)^2 = \frac{1}{K^2(0)}$$

قد يكون تابع لـ t أو لـ s

المستقيم له تلامس من المرتبة الأولى حسب المماس تلامس نقطة

حيث (x_c, y_c, z_c) هي مركز تقوس عند P_0

$$\Rightarrow \vec{OC} = \vec{OP_0} + \frac{1}{K(0)}\vec{n}(0)$$

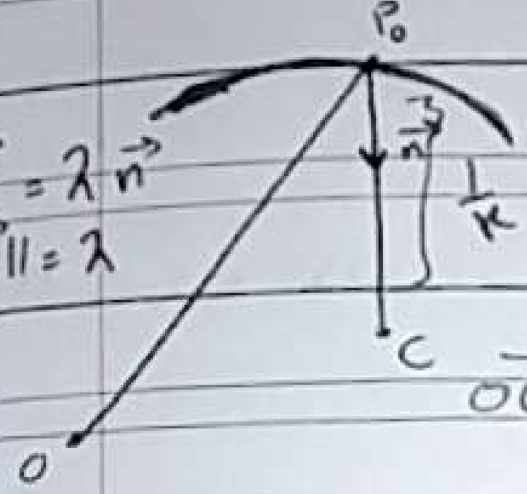
$$= (a,0,0) + \frac{1}{\frac{a}{a^2+b^2}}(-1,0,0)$$

$$= (a,0,0) + \left(\frac{-(a^2+b^2)}{a},0,0\right)$$

$$= \left(a - \frac{(a^2+b^2)}{a},0,0\right)$$

$$\vec{P_0C} = \lambda \vec{n}$$

$$\|\vec{P_0C}\| = \lambda$$



$$\vec{OC} = \left(\frac{-b^2}{a},0,0\right)$$

معادلة الكرة:

$$\left(X + \frac{b^2}{a}\right)^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{(a^2+b^2)^2}{a^2} \quad \text{--- ①}$$

إن المعادلة الديكارتية لدائرة التقوس عند P_0 هي ①، ②.

* المعادلتان الطبيعيتان (الذاتيتان) لمنحنٍ:

مبرهنة: إذا كانت $s \to K(s)$ ، $s \to \tau(s)$ دالتين معرفتين ومستمرتين على مجال مفتوح (محدود أو غير محدود) فيوجد منحنٍ وسيطه الطبيعي s وتمثل الدالتان K و τ التقوس والالتفاف له على الترتيب.

وإذا كان التقوس والالتفاف مشتركين بين منحنيين فيمكن الحصول على أحدهما من الآخر بانسحاب ودوران مستمرين.

①

يمكن الحصول على ② من ① من خلال انسحاب ودوران

②

* نسمي المعادلتين: $K = K(s)$ و $\tau = \tau(s)$

اللتان تعينان التقوس والالتفاف لمنحنٍ (منحنٍ واحد)

هما بالمعادلتين الطبيعيتين (الذاتيتين) لذلك المنحني.