تحليل ١

الدكتور : نايف طلي

المحاضرة : الثانية عشرة

التاريخ : ٢٠١٦/١١/٢٧

إعداد : رهف + رسمية + شهيناز

المحاضرة (12) 2016/11/21

بدأت المحاضرة بتمارين على الطلاب علماً وهي تتعلق بطالب في المرحلة الثانوية

Question 1:

Find the limit in each of

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-|x|}{|3x|-2x} \quad ، \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2+2x-3}$$

Question 2:

Find Domf and Rangf where

$$f(x)=\sqrt{x^3-9}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$$

Question 3:

$$\text{if } f(x)=\begin{cases} x & : x<-1 \\ cx+d & : -1\le x\le 2 \\ 2x-7 & : x>2 \end{cases}$$

Find c and d to be f continuous.

Question 4:

$$\text{if } f(x)=\frac{x}{x+1}$$

$$g(x)=\frac{2}{x-1}$$

Find $(g\circ f)(x)$

وبدأنا بالفصل الرابع من مقررنا.

تابع الدوال العددية بمتحول واحد:

* تعريف الدالة الحقيقية:

هي عبارة عن علاقة تربط كل عنصر من المنطلق بعنصر واحد فقط من المستقر بحيث:

لتكن X و Y مجموعتين غير خاليتين من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ إذا قرنا كل عنصر x من X بعنصر واحد فقط هو $f(x)$ من Y نقول:

إننا عرفنا دالة (تطبيقاً أو تابعاً) منطلقها (مجموعة تعريفها) X ومستقرها Y وقاعدة ربطها $x\longmapsto f(x)$

بعبارة أخرى:

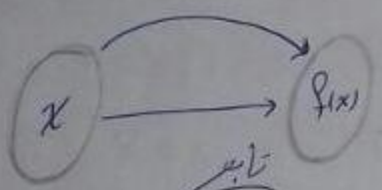
$$\forall x\in X : \exists! f(x) ; f(x)=y\in Y$$

أي..

أياً كان $x\in X$ فإنه يوجد $f(x)$ بشكل وحيد بحيث $f(x)=y\in Y$

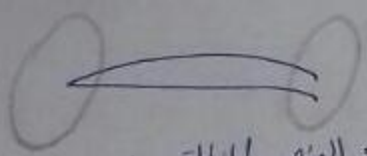
نسمي العنصر $f(x)$ بصورة العنصر x وفق f

للتوضيح:



تابع

ولكن



ليس تابع لأن العنصر بالمنطلق لا يجوز أن يرتبط بأكثر من عنصر في المستقر...

ملاحظة..

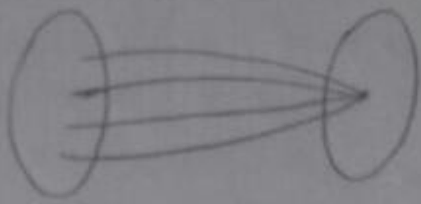
إن الرمز $\exists!$ يعني يوجد بشكل وحيد

والرمز $\exists$ " " على الأقل

- والتابع الثابت يكون:

$$f(x) = c$$

أي أن كل عناصر المنطلق لها صورة ثابتة



تابع ثابت

أي..

$$\forall a,b \in X \Longrightarrow f(a) = f(b)$$

عندها يكون هذا التابع ثابت

ملاحظة...

التابع الحقيقي نقصد أن المنطلق $\mathbb{R}$ والمستقر $\mathbb{R}$

الدالة الزوجية:

لتكن $f : X \longrightarrow Y$ دالة حقيقية

نقول عن f إنها دالة زوجية إذا حققت الشرط التالي:

$$f(-x) = f(x) \; ; \; x , -x \in X$$

الدالة الفردية

نقول عن الدالة f إنها دالة فردية إذا حققت الشرط التالي:

$$f(-x) = -f(x) \; ; \; x , -x \in X$$

مثال (1):

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = (-x^2) = x^2 = f(x)$$

إذاً الدالة زوجية

مثال (2)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x^3$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

إذاً الدالة فردية

ملاحظة (1):

أن خط البياني للدالة الفردية يكون متناظر بالنسبة للمبدأ ، وخط بياني للدالة الزوجية يكون متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

ملاحظة (2)

يوجد توابع ليست زوجية وليست فردية ويوجد تابع زوجي وفردي في آن واحد وهو التابع الصفري. مثال على تابع ليس زوجي وليس فردي

$$f(x) = x + 1$$

الدالة المتباينة:

لتكن $f : X \longrightarrow Y$ دالة حقيقية

نقول عن f إنها دالة متباينة إذا حققت الشرط:

$$\forall x_1 , x_2 \in X , f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

أي:

إذا تساوت الصور تساوت المتغيرات وهذا الشرط يكافئ الشرط التالي

$$\forall x_1 , x_2 \in X \; ; \; x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

أي:

إذا تباينت (اختلفت) عناصر المنطلق تباينت صورها كانت الدالة متباينة.

مثال..

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2$$

نلاحظ أن التابع ليس متباين وذلك بسبب ما يلي

$$\exists x_1 = 1 , x_2 = -1 \in \mathbb{R}$$

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

مثال 2 ..

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2$$

نلاحظ أن التابع f تباين وذلك

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ملاحظة ..

يمكن معرفة فيما إذا كانت الدالة المعطاة متباينة أو لا وذلك من خلال طرق تمثيل تلك الدالة وذلك من خلال الرسم أي مستقيم موازي للمحور x فإنه سوف يتقاطع مع خط البيان في تلك الدالة بنقطة واحدة على الأكثر وذلك إذا كانت الدالة متباينة على الأقل ونقيض إذا كانت الدالة ليست متباينة.

الدالة الغامرة ..

لتكن $f: X \to Y$ دالة حقيقية نقول عن f إنها دالة غامرة إذا تحقق الشرط:

$$\forall y \in Y : \exists x \in X ; f(x) = y$$

بمعنى آخر ..

نقول عن الدالة f إنها غامرة إذا كان كل عناصر المستقر تمثل صوراً لعناصر المنطلق أي إذا غطت عناصر المنطلق عناصر المستقر ..

المثال 1 ..

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2$$

نلاحظ أن التابع f ليس غامر

$$\exists y = -1 \in \mathbb{R} ; \forall x \in \mathbb{R}$$
$$f(x) \neq y \in Y$$

مثال (2)

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = y$$

الدالة التقابلية ..

لتكن $f: X \to Y$

دالة حقيقية نقول عن f إنها دالة تقابلية إذا اتصفت بأنها:

أن تكون الدالة f متباينة، وغامرة في آن واحد:

بمعنى آخر:

نقول عن الدالة f إنها تقابلية إذا اتصفت بالشرط:

أياً كان $y \in Y$ فيوجد A وحيد للمعادلة $f(x) = y$ هل وحيد فقط فإن أخذنا الحل $f^{-1}(y)$ فنكتب بذلك قد عرفنا تابعاً جديد ١ بالشكل التالي:

$$f^{-1}: Y \to X$$

أي ..

$$\forall y \in Y : \exists x \in X ; f^{-1}(y) = x$$

نسمي التابع العكسي للتابع f

مثال:

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = x^2$$

إن الدالة f متباينة وغامرة عندئذ فهي تقابل وأما تقابلها العكسي فهو تابع الجذر التربيعي:

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$\forall x \in \mathbb{R} ; f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

"تعريف: تطابق دالتين:"

$$f: X_1 \to Y_1$$
$$g: X_2 \to Y_2$$

دالتين حقيقيتين

نقول عن f و g أنهما متطابقتان إذا كان لهما نفس المنطلق $(X_1 = X_2)$ والمستقر $(Y_1 = Y_2)$ ونفس قاعدة الربط:

$$f(x) = g(x) ; \forall x \in X_1 = X_2$$

3

مثال:

$$f:\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\forall x\in\mathbb{R}^* ; f(x)=\ln(x^2)$$
$$g:\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\forall x\in\mathbb{R}^+ ; g(x)=2\ln(x)$$

نلاحظ أن:

$f \neq g$ وذلك بسبب اختلاف المنطلق

علماً أن $\ln(x^2) = 2\ln(x)$

في حال $x>0$

ملاحظة..

إن قواعد اللوغاريتم لا تتحقق إلا ضمن مجموعة تعريف واحدة

مثال:

$$f:\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\forall x\in\mathbb{R} : f(x)=\ln(x^2)$$
$$g:\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\forall x\in\mathbb{R}^+ ; g(x)=2\ln(x)$$

نلاحظ أن الشروط الثلاث لتطابق دالتين f, g قد تحقق حيث g و f نفس المنطلق والمستقر وقاعدة الربط

تعريف النقطة الداخلية:

نقول عن النقطة $x\in A\subseteq\mathbb{R}$ إنها نقطة داخلية إذا وجد جوار للنقطة x وليكن $]a,b[$ حيث $x\in\,]a,b[\, \subseteq A$

نلاحظ أنه إذا كانت x نقطة داخلية فإن $x\in A$ أما العكس غير صحيح بالضرورة.

ملاحظة:

إذا كان المجال مغلق جميع نقاطه داخلية باستثناء أطرافه ليست نقاط داخلية..

مثال: $A =]1,4[\cup \{5\}$

فنلاحظ أن $5\in A$ ولكن 5 ليست نقطة داخلية بينما أي نقطة في المجال $]1,4[$ هي نقطة داخلية

تعريف الدالة المحدودة:

نقول عن الدالة الحقيقية $f: X\to Y$ إنها دالة محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى أي إذا تحقق الشرط التالي:

$$\exists M>0 : |f(x)| \leq M ; \forall x\in X$$

وبشكل آخر:

$$\exists m, M ; m\leq f(x)\leq M ; \forall x\in X$$

مثال..

إن الدالة $f(x)=\cos(x)$ دالة محدودة لأن

$$\forall x\in\mathbb{R} : |\cos(x)|\leq 1$$

تعريف نهاية دالة بالشكل المبسط:

لتكن $f:X\to Y$ دالة حقيقية نقول عن الدالة f إن لها نهاية $b\in\mathbb{R}$ عند النقطة a إذا تحقق الشرطان التاليان:

1) أن تكون الدالة f معرفة في جوار a

2)

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b \iff \boxed{\lim_{x\to a} f(x) = b}$$

مثال..

لتكن لدينا الدالة الحقيقية f المعرفة بالشكل التالي:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \; ; \; x \mapsto f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

والمطلوب:

ادرس نهاية الدالة f، وذلك عند النقطة $x = 2$

الحل..

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \overset{>}{\to} 2} (x+2) = 4$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} (x+2) = 4$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = 4$$

مثال (2)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & ; \; x \neq 2 \\ 5 & ; \; x = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 2} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$= \lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

إذاً هذه هي النهاية..

ولكن هل الدالة مستمرة:

لا ؛ لأنه:

$$\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 2} f(x) \neq f(2)$$

$$f(2) = 5 \neq 4$$