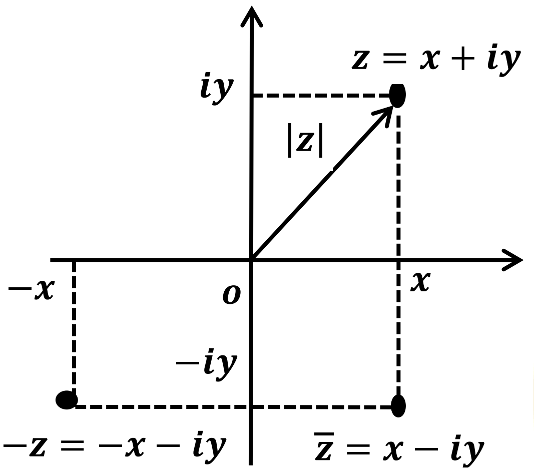
بسم الله الرحمن الرحيم

مادة التحليل العقدي ((١))

مدرّس المقرّر : د. محمّد الشيخ / تاريخ المحاضرة : 10/10/2016

الفصل الأوّل : مجموعة الأعداد العقديّة (المركّبة)

التفاسير الهندسية لبعض المفاهيم المتعلّقة بالعدد العقدي:



١) **المرافق:**

المرافق للعدد العقدي: $z = x + iy$ هو: $\bar{z} = x - iy$ ،

وهندسيّاً يمثّل النقطة المناظرة للنقطة z بالنسبة للمحور الحقيقي $\overrightarrow{ox}$.

٢) **النظير:**

النظير للعدد العقدي: $z = x + iy$ هو: $-z = -x - iy$

وهندسيّاً هو يمثل النقطة المناظرة لـ z بالنسبة لمبدأ الاحداثيات : (o) .

٣) **الطويلة:**

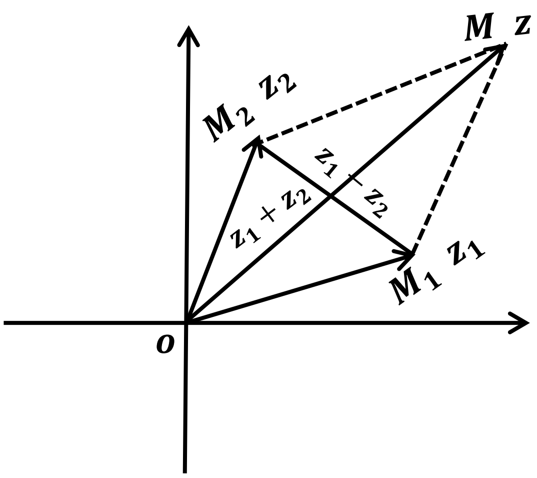
الطويلة للعدد العقدي $z = x + iy$ هي: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، وهندسيّاً هي بعد z عن المبدأ (o) .

٤) **مجموع عددين عقديين:**

بفرض لدينا: $z_1 = x_1 + iy_1 = (x_1, y_2)\ ,\ z_2 = x_2 + iy_2 = (x_2, y_2)$

إنَّ مجموع $z_1 + z_2$ جبرياً هو:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$



وهندسياً:

إنَّ z_1 ممثل بالشعاع $\overrightarrow{oM_1}$ ، وإنَّ : $\overrightarrow{oM_1} = (x_1, y_1)$

إنَّ z_2 ممثّل بالشعاع $\overrightarrow{oM_2}$ ، وإنَّ : $\overrightarrow{oM_2} = (x_2, y_2)$

فيكون:

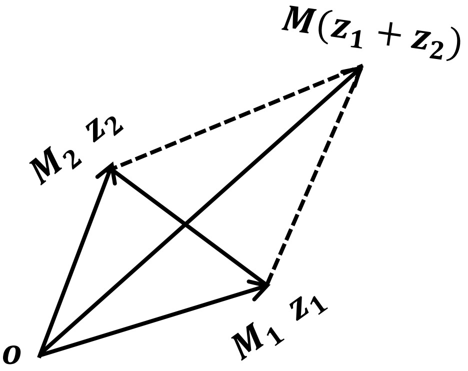
$$\overrightarrow{oM_1} + \overrightarrow{oM_2} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$
$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \overrightarrow{oM}$$

ومنه فإنَّ الشعاع: $\overrightarrow{oM} = \overrightarrow{oM_1} + \overrightarrow{oM_2}$ هو :

الشعاع الممثّل لـ $z_1 + z_2$ (القطرالرئيسي لمتوازي الأضلاع المنشأ على الشعاعين $\overrightarrow{oM_1}, \overrightarrow{oM_2}$) .

بينما $z_1 - z_2$ **هندسيّاً** هو الشعاع المرسوم على القطر الثانوي لمتوازي الأضلاع المنشأ على الشعاعين z_1 , z_2 الّذي بدايته نهاية الشعاع z_2 ونهايته نهاية الشعاع z_1 ، أي هو " البعد بين z_1 و z_2 " .

٥) <u>إثبات صحّة متراجحة المثلث $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$:</u>



في حالة $\overrightarrow{z_1}$ و $\overrightarrow{z_2}$ غير مرتبطين خطيّاً :

$|z_1 + z_2|$ هندسياً تمثل طول الضلع $[0M]$

$|z_1|$ هندسياً تمثل طول الضلع $[0M_1]$

$|z_2|$ هندسياً تمثل طول الضلع $[0M_2]$ وهي تساوي طول الضلع $[M_1M]$

ونعلم إنَّ مجموع طولي أي ضلعين في المثلّث أكبر من طول الضلع الثالثة .

ومنه فالمتراجحة محققة .

<u>الوظيفة:</u> إثبات صحة امتراجحة المثلّث **جبريّاً** .

٦) <u>إثبات صحّة المتراجحة : $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$:</u>

نأخذ المثلّث oM_1M_2 ، ولدينا طول $[oM_1]$ هو $|z_1|$ ، وإنَّ طول $[oM_2]$ هو $|z_2|$ ،

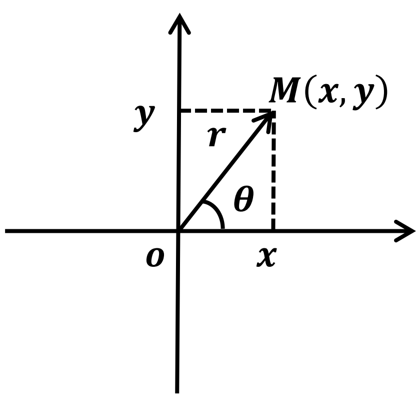
وإنَّ طول $[M_1M_2]$ هو $|z_1 - z_2|$ ، حيث أنَّ:

$$\overrightarrow{oM_2} - \overrightarrow{oM_1} = \overrightarrow{M_1M_2}$$

وهو الشعاع الممثل للعدد $z_1 - z_2$.

ونعلم أنَّ حاصل طرح طولي أي ضلعين في المثلّث أصغر من طول الضلع الثالثة ، ومنه فالمتراجحة محققة.

<u>الشكل القطبي (المثلّثي) للعدد العقدي:</u>



ليكن العدد العقدي $z = x + iy$ ولتكن النقطة M الممثّلة لـ z في المستوي ..

تستطيع أيضاً أن تعطي النقطة احداثيات قطبيّة ، وبالتالي الاحداثيات القطبية لـ M هي : - الاحداثي القطبي الأوّل :

$$r = |z| = |\overrightarrow{oM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- الاحداثي القطبي الثاني :

θ وهو أحد قياسات الزاوية بين الاتجاه الموجب لـ $\overrightarrow{ox}$ والشعاع $\overrightarrow{oM}$

أخذنا أحد قياسات الزاوية θ فقط لأنَّ لـ θ عدد لا نهائي من القياسات فإذا كانت θ_0 أحد هذه القياسات فإنَّ:

$\forall k \in \mathbb{Z} : \ \theta_0 + 2\pi k$ وهذه جميعها قياسات لـ θ .

ونرمز لجميع هذه القياسات بالرمز $(arg\, z)$ ، ونسمّيها زاوية أو عمدة z ، أمّا قياس θ الواقع في المجال $]-\pi, \pi]$ ، يسمّى : القيمة الرئيسية (التعيين الرئيسي) لزاوية z ، ويرمز له بـ $Arg\, z$.

واضح من الشكل أنَّ:

$$x = r.\cos\theta \quad , \quad y = r.\sin\theta$$

$$\Rightarrow z = x + iy = r.\cos\theta + i.r.\sin\theta = r\,(\cos\theta + i.\sin\theta)$$

ويسمّى هذا الشكل بالشكل المثلّثي (القطبي) لـ z ، ويمكن كتابته اختصاراً بـ : $z = [r, \theta\,]$

باستخدام هذا الرمز نستطيع وضع أي قياس لكن يفضّل أن نضع القيمة الرئيسيّة .

و بعض الكتب ترمز له بـ : $Cis\,\theta = \cos\theta + i.\sin\theta$

$$\Rightarrow z = r.\ \underbrace{C}_{\cos\theta}\ \underbrace{i}_{i}\ \underbrace{s}_{\sin\theta}\ \ \theta$$

أمثلة:

عين الشكل المثلثي للأعداد العقدية التالية:

$$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{z = 1 + i}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1 \ \Rightarrow\ \theta = \frac{\pi}{4}$$

وهي قياس مناسب للعدد $1 + i$ لأنها تقع في الربع الأول وهي من المجال: $]-\pi, \pi]$

$$\Rightarrow z = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2}\, cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\mathbf{2)}\ \boldsymbol{z = -1 - i\sqrt{3}}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \ \Rightarrow\ \theta = \frac{\pi}{3}$$

العدد يقع في الربع الثالث وضوحاً لكن $\frac{\pi}{3}$ تقع في الربع الأوّل ، وللانتقال من الربع الأول إلى الربع الثالث ، إمّا أن نضيف أو نطرح π بحيث لا نخرج من المجال $]-\pi, \pi]$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3} \ \Rightarrow\ z = -1 - i\sqrt{3} = \left[2, -\frac{2\pi}{3}\right] = 2\, cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

ملاحظة عل الهامش:

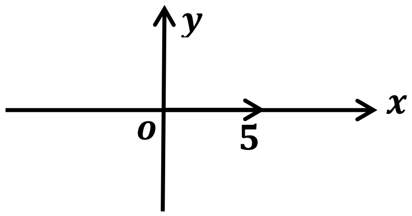
إنَّ $\sqrt{x}$ يمثّل الجذر غير السالب لـ x ، أي : $\sqrt{9} = +3$ ومن الخطأ القول أنَّ: $\sqrt{9} = -3$ و: $\sqrt{x^2} = |x|$

$$3)\ z = 5$$

نعلم أن طويلة العدد الحقيقي البحت هي القيمة المطلقة له:

$$r = |z| = |5| = 5$$

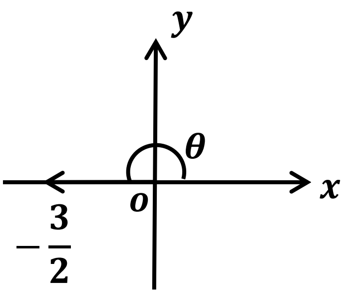
من الشكل:



$$Arg\ z = \ Arg\ 5 = 0 \ \Rightarrow z = [5,0] = 5\ cis\ 0$$

$$4)\ z = -\frac{3}{2}$$

إنَّ الطويلة هي بعد العدد عن المبدأ:



$$r = |z| = \left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$$

$$Arg\ z = \ Arg\left(-\frac{3}{2}\right) = \pi$$

لو حسبنا بالعكس سيظهر لنا الزاوية $-\pi$ لكنّها لا تنتمي للمجال $]-\pi,\pi]$ ونحن نريد القيمة الرئيسية .

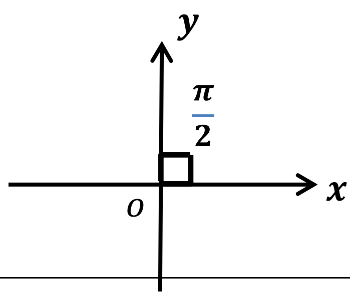
$$\Rightarrow z = \left[\frac{3}{2},\pi\right] = \frac{3}{2}\ cis\ \pi$$

$$5)\ z = 2i$$

$$r = |2i| = |2|.|i| = 2(1) = 2$$

$$Arg\ z = Arg\ (2i) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \ z = \left[2,\frac{\pi}{2}\right] = 2\ cis\ \frac{\pi}{2}$$

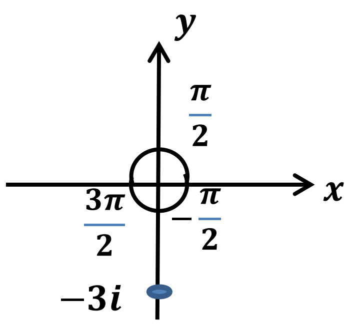


$$6)\ z = -3i$$

$$r = |-3i| = |-3|.|i| = 3$$

$$Arg\ z = Arg\ (-3i) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow z = -3i = \left[3,-\frac{\pi}{2}\right] = 3\ cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$



<u>الشكل الأسّي للعدد العقدي:</u>

$$z = r.e^{i\theta}$$

حيث:

$$r = |z| \ , \ \theta = arg\, z$$

<u>ملاحظة١:</u>

نعتبر هذا " مبدأياً " مجرد ترميز ولا يدل بالضرورة على عدد أسّي ، لأننا نعلم أنَّ الأسّي هو عدد حقيقي ،ولكن لاحقا سوف نستنتج أن العدد الأسي العقدي موجود ..

<u>ملاحظة٢:</u>

يكفي لتعيين الشكل المثلّثي أو الأسّي لعدد عقدي تعيين r و θ .

انتهت المحاضرة ..

مع تحيات فريق الرياضيات الأوّل ^_^

لا تنسونا من صالح دعواتكم