Syria Math

التحليل العددي 1

الدكتورة:رشا بعاج

نموذج عن أسئلة الدورات

مرحباً أصدقائي ، لتلافي التكرار الحاصل في الدورات و لكي نشمل دوراتٍ أكثر من الدورات الثلاث السابقة سنقوم بتقديم نموذج عن الأسئلة التي تمر في الدورات و كيفية حلها ، حيث نموذج الدورات السابقة هو كالتالي:

السؤال الأول : أوجد العدد الشرطي

السؤال الثاني : يكون عن إيجاد جذر تقريبي لدالة سواء بطريقة تنصيف المجال أو طريقة الوضع الخاطئ أو .... و في نص السؤال يتم تحديد معيار التوقف $\varepsilon_f, \varepsilon_x$ أو عدد محدد من التكرارات ثم يطلب حساب الخطأ الأعظمي ، ما هي مرتبة التقارب؟، و ما هو عدد التكرارات الأعظمي للحصول على دقة معطاة؟ .

السؤال الثالث : إيجاد قيمة تقريبية لتكامل محدد و تحدد الطريقة المطلوبة

السؤال الرابع : إيجاد حدودية استيفاء لدالة معينة و بطريقة محددة

السؤال الخامس : تطبيق على التفاضل العددي

و يتم في ورقة الامتحان التنوية على الملاحظات التالية:

١- يسمح باستخدام الآلات الحاسبة العلمية غير المبرمجة
٢- لا يسمح باجراء تدوير للأعداد ذات المنازل العشرية إلى أقل من خمس منازل عشرية
٣- اكتب بخط واضح و حافظ على نظافة ورقة الإجابة
٤- اقرأ الأسئلة بهدوء ثم أجب عن جميعها بدقة و اكتب القوانين المستخدمة.

و إليكم نماذج هذه الأسئلة ☺ :

السؤال الأول: أوجد العدد الشرطي للدالة $f(x) = e^x$

من أجل هذه القيمة .

$$f'(x) = e^x$$

$$\text{العدد الشرطي} = \left|\frac{f'}{f}x\right| = \left|\frac{e^x}{e^x}x\right| = x$$

من اجل x=10 إذاً" العدد الشرطي =10

f(x) مريضة لان n=10>1

السؤال الثاني :

باستخدام طريقة لاغرانج أوجد حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ المعرف عند النقاط $\{0,1,3\}$ ثم احسب بشكل تقريبي $f(0.5)$ والخطأ المرتكب .

الحل:

نوجد قيم $f(x)$ عند نقاط الارتكاز فنجد الجدول الاتي :

x	0	1	3
$f(x)$	1	0.5	0.25

ثم نوجد حدوديات لاغرانج :

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_1)}=\frac{(x-1)(x-3)}{(-1)(-3)}=\frac{x^2-4x+3}{3}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x)(x-3)}{(1)(-2)}=\frac{x^2-3x}{-2}$$

$$L_2(x)=\frac{(x)(x-1)}{(3)(2)}=\frac{x^2-x}{6}$$

$$P_2(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x+1-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{24}x^2-\frac{1}{24}x$$

$$=0.125x^2-0.625x+1$$

$$\Rightarrow f(0.5)\approx P_2(0.5)=0.7187$$

لحساب الخطأ المرتكب نضع :

$$f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}\quad ,f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}\quad ,f'''(x)=-\frac{6}{(x+1)^4}$$

$$M=\max|f'''(\mu)|\quad : 0\le\mu\le 3$$

$$=\frac{6}{(1)^4}=\frac{6}{1}=6$$

$$w(0.5)=(0.5-0)(0.5-1)(0.5-3)=0.625$$

$$|e(0.5)| \leq \frac{(6)(0.625)}{3 \times 2 \times 1} = 0.625$$

السؤال الثالث :

احسب بشكل تقريبي بطريقة أشباه المنحرفات من أجل $n = 4$ قيمة التكامل :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + e^x}$$

الحل :

نوجد قيمة h نجد :

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0.25$$

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x)$	0.5	0.4378	0.3775	0.2308	0.2689

$$I \approx h\big(f(x_0) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\big)$$

$$\frac{0.25}{2}(0.5 + 0.8756 + 0.755 + 0.6416 + 0.2689) = 0.3801$$

السؤال الرابع : باستخدام تنصيف المجال أوجد جذر تقريبي للمعادلة :

$f(x) = x - 5lnx = 0$ في المجال $[1,2]$ بدقة $\varepsilon = 0.05$

الحل :

نلاحظ أن : $f(1) = 1 > 0 \quad , f(2) = -0.7729 < 0$

وبالتالي يوجد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[1,2]$ وليكن α

$$x_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5 \;; f(x_1) = -0.5273 < 0 \;\Rightarrow\; \alpha \in [1,1.5]$$

$$x_2 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25 \ ; f(x_2) = 0.1342 > 0 \implies \alpha \in [1.25, 1.5]$$

$$x_3 = 1.375 \ ; f(x_3) = -0.2172 < 0 \implies \alpha \in [1.25, 1.375]$$

$$x_4 = 1.3125 \ ; f(x_4) = -0.0471 < 0 \implies \alpha \in [1.25, 1.3125]$$

$$x_5 = 1.28125 \ ; f(x_5) = 0.042 > 0 \implies \alpha \in [1.28125, 1.3125]$$

نلاحظ أن بعد المجال السابق هو:

$$\alpha \approx x_5 = 1.28125 \Leftarrow |x_5 - x_4| = 0.03125 < \varepsilon$$

السؤال الخامس :

باستخدام طريقة سيمبسون ومن أجل $n = 4$ أوجد التكامل :

$$I = \int_0^{0.8} \frac{dx}{1+x^2}$$

الحل :

نلاحظ أن $h = 0.2$ ومنه :

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8
$f(x)$	1	0.9615	0.862	0.7352	0.6097

$$I \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$= \frac{0.2}{3}\big(1 + 4(0.9615) + 2(0.862) + 4(0.7352) + (0.6097)\big) = 0.6747$$

السؤال السادس :

باستخدام طريقة أشباه المنحرفات من أجل $n = 4$ قيمة تقريبية للتكامل

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin(x)}$$

الحل :

نوجد قيمة h نجد :

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{\frac{\pi}{2}-0}{4}=\frac{\pi}{8}$$

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	1	0.7232	0.5857	0.5197	0.5

$$I\approx\frac{h}{2}\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\dots\dots 2f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

$$\approx\frac{\pi}{16}[(1+2(0.7232)+2(0.5857)+2(0.5197)+0.5)]$$

$$\approx 1.0126$$

السؤال السابع :

باستخدام طريقة تنصيف المجال أوجد جذري تقريبي للمعادلة :

$f\ (x)=x-e^{-x}$ في المجال$[0.5\ ,1]$ بدقة $\varepsilon=0.02$

الحل :

نلاحظ أن $f(0.5)=-0.1065<0$, $f(1)=0.6321>0$

وبالتالي يوجد جذر للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[0.5,1]$ وليكن α

وسنجري تطبيق قانون تنصيف المجال :

$$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{0.5+1}{2} = 0.75 \Rightarrow f(x_1) = 0.2776 > 0$$

$$\Rightarrow \alpha \in [0.5, 0.75]$$

ملاحظة : أصبح مجال الـ $[a,b]$ هو المجال الجديد .

$$x_2 = \frac{a+b}{2} = \frac{0.5+0.75}{2} = 0.625 \Rightarrow f(x_2) = 0.08976 > 0$$

$$\Rightarrow \alpha \in [0.5, 0.625]$$

$$x_3 = \frac{a+b}{2} = \frac{0.5+0.625}{2} = 0.5625 \Rightarrow f(x_3) = -0.0072 < 0$$

$$\Rightarrow \alpha \in [0.5625, 0.625]$$

$$x_4 = \frac{a+b}{2} = \frac{0.5625+0.625}{2} = 0.5937 \Rightarrow f(x_4) = 0.0414 > 0$$

$$\Rightarrow \alpha \in [0.5625, 0.5937]$$

$$x_5 = \frac{a+b}{2} = \frac{0.5625+0.5937}{2} = 0.5781 \Rightarrow f(x_5) = 0.0171 > 0$$

$$\Rightarrow \alpha \in [0.5625, 0.5781]$$

نلاحظ أن بعد المجال السابق هو

$\alpha \approx x_5 = 0.5781 \Leftarrow |x_5 - x_4| 0.0156 < \varepsilon$

السؤال الثامن : أوجد قيمة التكامل التالي باستخدام طريقة سيمبسون وشبه المنحرف واحسب الخطأ المرتكب: $\int_2^4 \boldsymbol{ln(1+2x)\,.\,dx}$ (تحدد طريقة واحدة في أغلب الدورات)

الحل: أولاً: إيجاد التكامل باستخدام طريقة "شبه المنحرف "

١- نحدد الدالة: $f(x) = ln(1+2x)$

٢- نوجد قيم $f(x_i)$ حيث أن قيم x_i حدود التكامل ذاتها أي $x_0 = 2$ و $x_1 = 4$:

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = 2$	$f(2) = 1.60943$
$x_1 = 4$	$f(4) = 2.19722$

٣- نوجد h :

$$h = |b - a| = |4 - 2| = 2$$

٤- نطبّق قانون شبه المنحرف:

$$I = \frac{h}{2}[y_0 + y_1] = \frac{2}{2}[1.60943 + 2.19722] \approx 3.80662$$

٥- حساب الخطأ المرتكب:

$$E = \frac{h^3}{12}\left|f^{(2)}(\theta)\right|$$

نوجد $f^{(2)}(\theta)$:

$$f(x) = ln(1 + 2x) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{1 + 2x} \Rightarrow f''(x) = \frac{-4}{(1 + 2x)^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(2)^3}{12}\left|\frac{-4}{(1 + 2x)^2}\right| = \frac{8}{12}\left|\frac{-4}{(1 + 2(2))^2}\right| = 0.66666\left(\frac{4}{25}\right) = 0.10667$$

حيث أننا عوضنا $x = 2$ لأنها تعطي أعظم قيمة للمشتق.

ثانياً: إيجاد التكامل باستخدام طريقة "سيمبسون"

٣- نوجد قيم $f(x_i)$ حيث أن قيم x_i حدود التكامل ذاتها أي $x_0 = 2$ و$x_1 = 4$:

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = a = 2$	$f(2) = 1.60943$
$x = \frac{b + a}{2} = 3$	$f(3) = 1.94591$
$x_1 = b = 4$	$f(4) = 2.19722$

٤- نطبق قانون سيمبسون:

$$I = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]$$
$$= \frac{1}{3}[1.60943 + 4(1.94591) + 2.19722]$$
$$\approx 3.86343$$

٥- حساب قيمة الخطأ المرتكب:

$$E = \frac{h^5}{90}\left|f^{(4)}(\theta)\right|$$

نوجد $f^{(4)}(\theta)$: حيث لدينا :

$$f''(x) = \frac{-4}{(1+2x)^2}$$

$$\Rightarrow\ f'''(x) = \frac{-2(4)(1+2x)}{(1+2x)^4} = \frac{-8}{(1+2x)^3}$$

$$\Rightarrow\ f^{(4)}(x) = \frac{2(-4)(1+2x)^4 - 4(4)(1+2x)^3}{(1+2x)^8}$$

$$= \frac{-8(1+2x)^4 - 16(1+2x)^3}{(1+2x)^8}$$

$$\Rightarrow\ f^{(4)}(x) = \frac{-24}{(1+2x)^4}$$

لمعرفة θ والتي هي القيمة التي تعطي المشتق قيمة أعظمية يجب أن ندرس التابع لكن إذا كان التابع معقد يمكن أن نعوّض أطراف التكامل بالمشتق أي نعوض بداية المجال ونهاية المجال والقيمة التي تعطي المشتق أكبر قيمة منهما نعتبرها هي القيمة المطلوبة (وهذا الكلام صحيح في هذا المقرّر فقط).

$$E = \frac{1}{90}\left|\frac{-24}{(1+2(2))^4}\right|$$

$$= \frac{1}{90}\cdot\frac{24}{625} = 0.00042$$

السؤال الثامن أوجد المشتق للدّالة f عند $x_0 = 0.2$ علماً أنَّ:

x_i	0.1	0.2	0.4
$f(x_i)$	2.11	3.04	5.12

الحل: لدينا:

$$h_1 = 0.4 - 0.2 = 0.2$$

$$h_2 = 0.2 - 0.1 = 0.1$$

يلاحظ أنَّ النّقاط ليست متساوية البعد لذلك لا نطبّق قانون مشتق الدّالة عند ثلاث نقاط

لذلك نلجأ لقانون الاشتقاق الّذي يحوي نقطتين

وهنا لدينا المشتق المطلوب عندما $x = 0.2$ ومنه فسوف نعتبر النقطتان هما:

$$x_0 = 0.2 \quad , \qquad x_1 = x_0 + h = 0.2 + 0.2 = 0.4 \quad ; h = 0.2$$

نطبّق قانون التقدّميّة لنقطتين لأنّنا أخذنا النّقطة الّتي تليها...

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{5.12 - 3.04}{0.2} = 10.4$$

ثمَّ نعتبر النقطتان هما:

$$x_0 = 0.2 \quad , \qquad x_1 = x_0 - h = 0.2 - 0.1 = 0.4 \quad ; h = 0.1$$

نطبّق قانون التّراجعيّة لنقطتين لأنّنا أخذنا النّقطة الّتي قبلها...

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = \frac{3.04 - 2.11}{0.1} = 9.3$$

تنويه: " في مثل هذا السؤال لن يطلب حساب قيمة الخطأ لأنّه لم يعطى f بنص السؤال "

نأمل أن يكون هذا العمل مفيداً و أن يكون عوناً للطالب في دراسة المقرر و اختبار نفسه و أن يساعده في مراجعة الأفكار الامتحانية و تقييم دراسته