Mon 28/11/2016 — المحاضرة السابعة عشرة

تمرين: هل هناك تلامس بين بياني الدالتين في الحالات الآتية ومن أي مرتبة هذا التلامس إن وجد.

1) $f_1(x)=0$, $f_2(x)=x^2$

الحل: $\mathcal{L}_1$ بيان f_1 هو المحور ox.

$\mathcal{L}_2$ بيان f_2 هو القطع المكافئ $y=x^2$.

إنّ $o(0,0)$ هي النقطة المشتركة الوحيدة بين $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$ حيث $f_1(0)=f_2(0)=0$

$$\left.\begin{array}{l} f_1'(x)=0 \Rightarrow f_1'(0)=0 \\ f_2'(x)=2x \Rightarrow f_2'(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_1'(0)=f_2'(0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_1''(x)=0 \Rightarrow f_1''(0)=0 \\ f_2''(x)=2 \Rightarrow f_2''(0)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f_1''(0)\neq f_2''(0)$$

$\Leftarrow$ لـ $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$ تلامس من المرتبة الأولى عند المبدأ.

2) $f_1(x)=0$, $f_3(x)=x^4$

النقطة المشتركة الوحيدة بين $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_3$ (بيان f_3) هي المبدأ حيث $f_3(0)=f_1(0)=0$

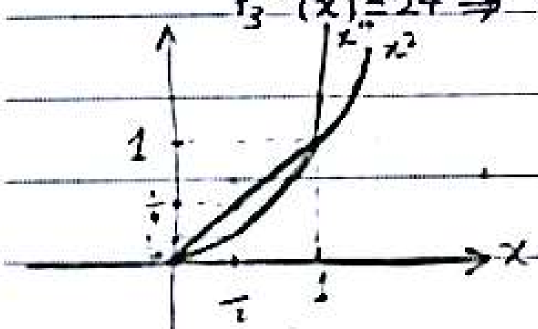
$f_1'(0)=0$, $f_3'(x)=4x^3 \Rightarrow f_3'(0)=0 \Rightarrow f_1'(0)=f_3'(0)$

$f_3''(x)=12x^2 \Rightarrow f_3''(0)=0=f_1''(0)$

$f_3'''(x)=24x \Rightarrow f_3'''(0)=0=f_1'''(0)$

$f_3^{(4)}(x)=24 \Rightarrow f_3^{(4)}(0)=24\neq 0=f_1^{(4)}(0)$

فهناك تلامس بين $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_3$ عند المبدأ من المرتبة الثالثة.



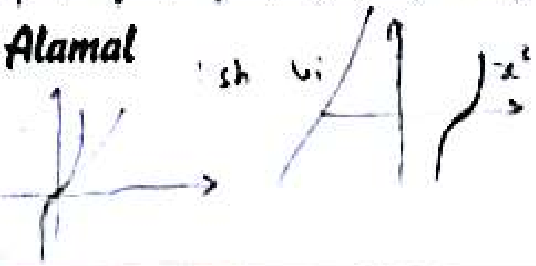
تلاصق / تلامس / المحور ox / ، المتطابقة x^2 / (نفس درجة ...)

طالما هنالك تساوي بين المشتقة الأولى [illegible]

لا يوجد تلامس بين f_1 و f_2 ... النقطة $(0,0)$

بعض [illegible] يكون تلامس من مرتبة صفر

Alamal

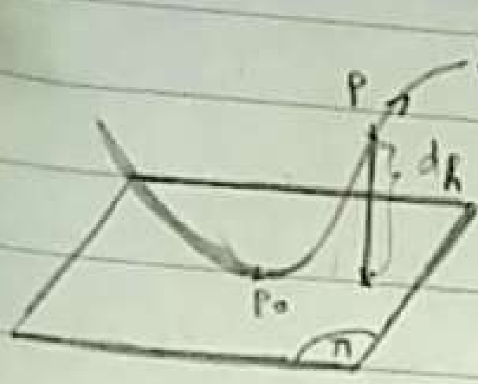


يوجد تشابه بين بياني sh / x^2 مع ox هو مماس (متشابهة الشكل)
x^2 تماسه ox
sh مماسه [illegible]
[illegible] المماس [illegible]

/ /

تلامس منحنٍ مع مستوٍ - تلامس منحنٍ مع كرة (السطح الكروي):

لتكن p_0 نقطة مشتركة بين مستوٍ π ومنحنٍ $\mathcal{L}$ ولتكن p نقطة متحركة على $\mathcal{L}$ ولتكن h القياس الجبري لطول المقوس $\widehat{P_0P}$ و d_h هو بُعد النقطة p عن المستوي.



نقول إنّ للمنحني $\mathcal{L}$ تلامساً مع المستوي من المرتبة n على الأقل إذا تحقق ما يلي:

$d_h = o(h^n)$ في جوار $h=0$.

أي: $\dfrac{d_h}{h^n} \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \quad (p\to p_0)$

مثال: هل هناك تلامس بين المستوي $\pi: 2z-3y=0$ وبين اللولب المثلث:

$\vec{r}(t)=(2\cos t, 2\sin t, 3t) \;:\; t\in\mathbb{R}$

عند النقطة $p_0(2,0,0)$ ومن أي مرتبة هذا التلامس في حال وجوده.

$(2,0,0)=\vec{OP_0}=\vec{r}(t)$

الحل: إنّ p_0 هي نقطة من اللولب الموافقة لـ $t_0=0$.

لتكن p نقطة متحركة على اللولب مقابلة للوسيط t، إذن:

$$h=\int_0^t \|\vec{r}\,'(u)\|\,du$$

$$h=\int_0^t \sqrt{4+9}\,du=\sqrt{13}\,u\Big]_0^t=\sqrt{13}\,t$$

$$d_h=\frac{|2(3t)-3(2\sin t)|}{\sqrt{4+9}}=\frac{6}{\sqrt{13}}\,|t-\sin t|$$

ملاحظة: إذا كان $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ مستوٍ، فإنّ بُعد النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ عن المستوي π يعطى بالدستور التالي:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\frac{d_h}{h}=\frac{6}{13}\cdot\frac{|t-\sin t|}{t}$$

$t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}\cdots$ نستفاد من نشر $\sin t$:

$$=\frac{6}{13}\cdot\frac{\left|\frac{t^3}{3!}-\frac{t^5}{5!}+\cdots\right|}{t}=\frac{6}{13}\cdot\frac{t^2|t|}{t}\left|\frac{1}{3!}-\frac{t^2}{5!}+\cdots\right|\xrightarrow[t\to 0]{h\to 0} 0$$

$h\to 0 \Leftrightarrow t\to 0$

لو كان السؤال أثبت أن هناك تلامس بين المنحني والمستوي من المرتبة الأولى على الأقل ...

$\Leftarrow$ هناك تلامس بين اللولب والمستوي من المرتبة الأولى على الأقل عند p_0.

Alamal

$\frac{|t|}{t} \xrightarrow[t\to 0]{}$ غير موجودة

$$\frac{d_h}{h^2} = \frac{6}{13\sqrt{13}} \cdot \frac{t^3|t|}{t^2} \cdot \left|\frac{1}{3!} - \frac{t^2}{5!} + \cdots\right| \xrightarrow[t\to 0]{h\to 0} 0$$

⟸ هناك تلامس بين اللولب والمستوي من المرتبة الثانية على الأقل عند P_0.

⟸ π هو المستوي الملاصق للولب عند $P_0(2,0,0)$

$$\frac{d_h}{h^3} = \frac{6}{169} \cdot \frac{t^2|t|}{t^3} \left|\frac{1}{3!} - \frac{t^2}{5!} + \cdots\right| = \frac{6}{169} \cdot \frac{|t|}{t} \left|\frac{1}{3!} - \frac{t^2}{5!} + \cdots\right|$$

النهاية غير موجودة

⟸ $\lim_{h\to 0} \frac{d_h}{h^3}$ غير موجودة ⟸ $d_h \neq o(h^3)$

⟸ التلامس بين اللولب والمستوي هو من المرتبة الثانية.

(التلامس بين المنحني والأرض بنفس الشيء (لم نركز عليه))

المستقيم المماس لمنحنٍ عند نقطة منه:

تعريف: ليكن $\mathcal{L}$ منحنٍ و p نقطة منه. نسمي المستقيم الذي له تلامس مع $\mathcal{L}$ من المرتبة الأولى على الأقل عند p (في حال وجوده) المستقيم المماس لـ $\mathcal{L}$ عند p

مبرهنة: ليكن $\mathcal{L}$ منحنياً من الصف C_1 و $s \to \vec{r}(s)$ تمثيلاً طبيعياً لـ $\mathcal{L}$ و p_0 نقطة نظامية لـ $\mathcal{L}$ (عندما لا نحدد في أي تمثيل نعني نظامية في التمثيل الطبيعي). عندئذٍ يوجد مستقيم مماس لـ $\mathcal{L}$ عند p_0 ويكون $\frac{d\vec{r}}{ds}(s_0) = \vec{r}^{\,\bullet}(s_0)$ متجه واحدة يوازي ذلك المستقيم (وحيد)

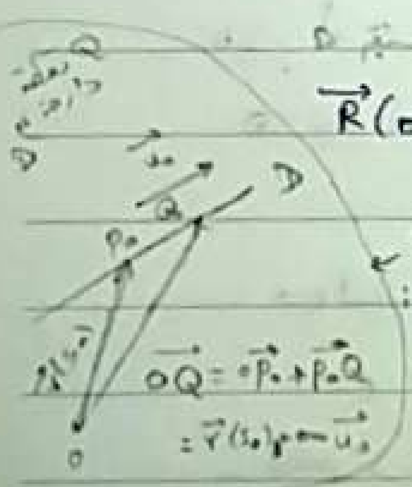
حيث s_0 قيمة الوسيط الطبيعي المقابلة لـ p_0.

الإثبات: كون p_0 نظامية يعني أن $\vec{r}^{\,\bullet}(s_0)$ متجه واحدة (حسب مبرهنة سابقة).

ليكن D مستقيماً ماراً من p_0 متجه واحدته $\vec{u}_0$ عندئذٍ:

$$\vec{R}(\sigma) = \vec{r}(s_0) + \sigma\,\vec{u}_0 \qquad : \quad \sigma \in \mathbb{R}$$

تمثيل طبيعي لـ D. ($\sigma = 0$ قيمة الوسيط الطبيعي لـ p_0 على المستقيم، لأن $\vec{R}(0) = \vec{r}(s_0) = \vec{OP_0}$)



يكون بين $\mathcal{L}$ و D تلامس عند p_0 من المرتبة الأولى على الأقل إذا تحقق ما يلي:

$\vec{r}(s_0) = \vec{R}(0)$ وهذا محقق.

$$\vec{r}^{\,\bullet}(s_0) = \frac{d\vec{R}}{d\sigma}(0) \Leftrightarrow \boxed{\vec{r}^{\,\bullet}(s_0) = \vec{u}_0}$$

موجود وغير معدوم لأن p_0 نظامية.

$$\Leftrightarrow \quad \vec{R}(\sigma) = \vec{r}(s_0) + \sigma\,\vec{r}^{\,\bullet}(s_0)$$ هو المستقيم المماس لـ $\mathcal{L}$

بهذه البرهنة ضمنا وجود المماس
وعينت معادلته.

عند P_0 . وهو وحيد أكيد.

المحاضرة الرابعة عشرة