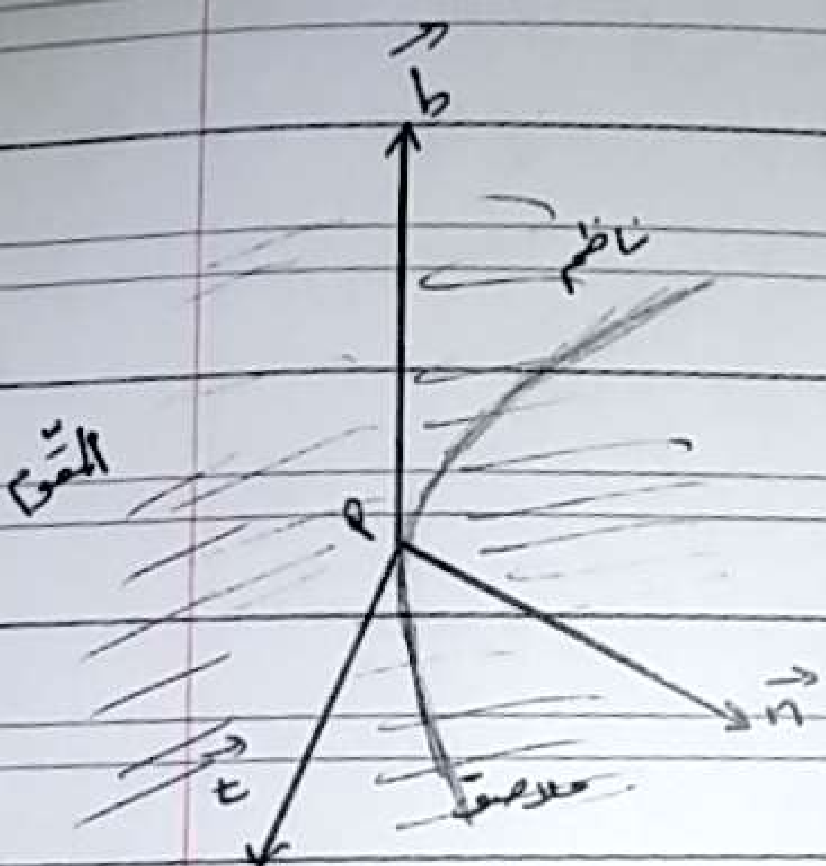
## م 22 - شرح المستويات: الملاصق، الناظم، المقوّم

بوجود فرينيه:

المستقيم المماس معادلته هي:

$$\vec{R} = \vec{r}(t_0) + \lambda \underbrace{\vec{t}}_{=\ \vec{r'}(t_0)}$$

$\vec{r'}(t_0)$ إحداثيات $t$ ناظمية




بينما المعادلات الديكارتية له حيث $t=(\alpha,\beta,\gamma)$ هي:

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$$

لدينا أيضاً معادلة المستوي الناظم هي:

$$(\vec{R} - \vec{r}(t_0)) . \vec{t} = 0$$

وهي تعين معادلة ديكارتية له بشكل:

$$\alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) + \gamma(z-z_0) = 0$$

أما معادلة الناظم وسيطياً فهي تتعين بـ $\vec{b}$ و $\vec{n}$ بالشكل:

$$\vec{R}(u,v) = \vec{r}(t_0) + u\vec{n} + v\vec{b}$$

بينما الملاصق وسيطياً فهو يتعين بـ $\vec{n}$ و $\vec{t}$ بالشكل:

$$\vec{R}(u,v) = \vec{r}(t_0) + u\underbrace{\vec{t}}_{\vec{r'}(t_0)} + v\underbrace{\vec{n}}_{\vec{r''}(t_0)}$$

حيث $t_0$ نقطة نظامية

مبرهنة: ليكن $L$ منحنياً و $\vec{r}(s) \longrightarrow s$ تمثيلاً طبيعياً من صف $C^3$ عندئذ المشتقات لمتجهات فرنيه عند نقطة نظامية وغير معوقة تحقق علاقات التالية:

$$1) \quad \frac{d\vec{t}}{ds} = K\vec{n}$$

$$2) \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = -K\vec{t} + \tau\vec{b}$$

$$3) \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau\vec{n}$$

تسمى بعلاقات أو دساتير فرنيه حيث $K$ و $\tau$ عددين حقيقين.

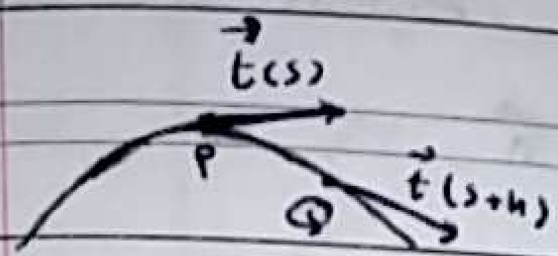
تقوس منحني: ليكن $\vec{r}(s) \longrightarrow s$ تمثيلاً طبيعياً لمنحنٍ ما ولتكن $P$ نقطة نظامية وسيطها الطبيعي $s$ ولتكن نقاط المنحني في جوار لـ $P$ جميعها نظامية. لتكن $Q$ نقطة من المنحني في ذلك الجوار وسيطها الطبيعي $s+h$. لنرمز لزاوية بين متجهي واحدة المماس في $P$ و $Q$ بـ $\omega\left(\vec{t}(s), \vec{t}(s+h)\right)$

تسمى النهاية $\lim_{h \to 0} \frac{\omega}{|h|}$ في حال وجودها تقوس المنحني عند نقطة $P$

إذا كانت $P$ قوية عندها يوجد تقوس لمنحني

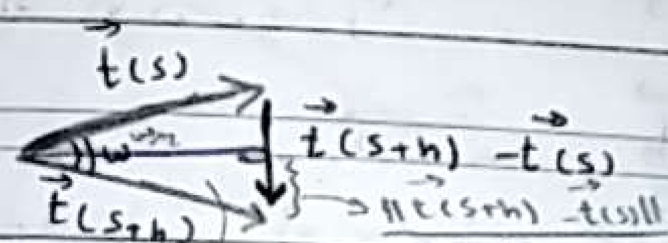
* كون المنحني نظامي من صف $C_1$ فإن مشتقاته من مرتبة ثانية موجودة ومستمرة
كون مشتق الأول موجود وغير معدوم فمتقال سيكون نظامية وهذا المتجه سيكون ثابت الطول
" " الثاني " فهو عامود على مشتق الأول وهذا يعني أن انتقال لن تكون معقوفة.

لكل منحني نظامي من صف $C_2$ تقوس
مرهف يوجد في كل نقطة للمنحني
$K = \|\vec{r}''(s)\|$ حيث $s$ وسيط
أي $\|\vec{r}''(s)\|$ مساوي لـ
طبيعي لنقاط منحني.




الإثبات :

وضع زاوية بين متجهين




مثلث متساوي الساقين
المستقيم المتعلق بالقاعدة هو المنصف والموسط والارتفاع

لكون المستقيم هو ارتفاع عندها:

$$\frac{\|\vec{t}(s+h)-\vec{t}(s)\|}{2} = \underbrace{\|\vec{t}(s+h)\|}_{\text{شعاع واحدي}} \sin\frac{w}{2}$$

$$\Rightarrow \|\vec{t}(s+h)-\vec{t}(s)\| = 2\sin\frac{w}{2}$$

$$\frac{w}{|h|} = \frac{w}{2\sin\frac{w}{2}} \cdot \frac{2\sin\frac{w}{2}}{|h|}$$

$$= \frac{\frac{w}{2}}{\sin\frac{w}{2}} \cdot \frac{\|\vec{t}(s+h)-\vec{t}(s)\|}{|h|} \quad ---- (1)$$

لدينا $\vec{t} = \vec{r}'(s)$ موجود ومستمر $\Leftarrow$ $\vec{t}(s+h) \xrightarrow[h\to 0]{} \vec{t}(s)$

وعليه $w \to 0$

بأخذ نهاية (1) عند $h \to 0$

$$\vec{K} = \lim \frac{w}{|h|} = (1) \cdot \|\vec{t}'\| = \|\vec{r}''(s)\|$$

$\vec{t}' = \vec{r}''(s)$ موجود ومستمر
(كون منحني من صف $C_2$)

Scanned by CamScanner

مبرهنة: إذا كان $t \longrightarrow \vec{r}(t)$ تمثيلاً وسيطياً من صف $C_2$ لمنحنى $\mathcal{L}$ فإن التقوس لـ $\mathcal{L}$ عند كل نقطة منتظمة وغير معوقة في تمثيل $\vec{r}$ يعطى بالمساواة التالية:

$$K = \frac{\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\|}{\|\vec{r}'\|^3}$$

البرهان: $\vec{r}' \wedge \vec{r}'' = (s')^3 (\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}})$

بأخذ نظيم $\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\| = (s')^3 \underbrace{\|\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}}\|}$

$\underbrace{\|\dot{\vec{r}}\|}_{\text{متجه واحدة}} . \|\ddot{\vec{r}}\| \underbrace{\sin(\wedge)}_{1}$ لأن زاوية $\frac{\pi}{2}$

$= K \|\ddot{\vec{r}}\|$

$$\Longrightarrow K = \frac{\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\|}{(s')^3} = \frac{\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\|}{\|\vec{r}'\|^3}$$

ملاحظات: إذا كان $t \longrightarrow \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ تمثيلاً وسيطياً من الصف $C_2$ لمنحنى مستوٍ فإن:

$$K = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

تقوس دائرة هو ثابت في كل نقطة منه و يساوي مقلوب نصف قطرها.

$\vec{r}(t) = (x_0(t)\ a\cos t, y_0(t)\ b\sin t)$ من صف $C_\infty$ تمثيل لدائرة مركزها $(x_0, y_0)$ ونصف قطرها

$\forall t \in [0, 2\pi]$ ذلك $0 \neq \vec{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t)$

أي جميع نقاط دائرة نظامية

$$\vec{r}''(t) = (a\cos t, -a\sin t) \neq \vec{0}$$

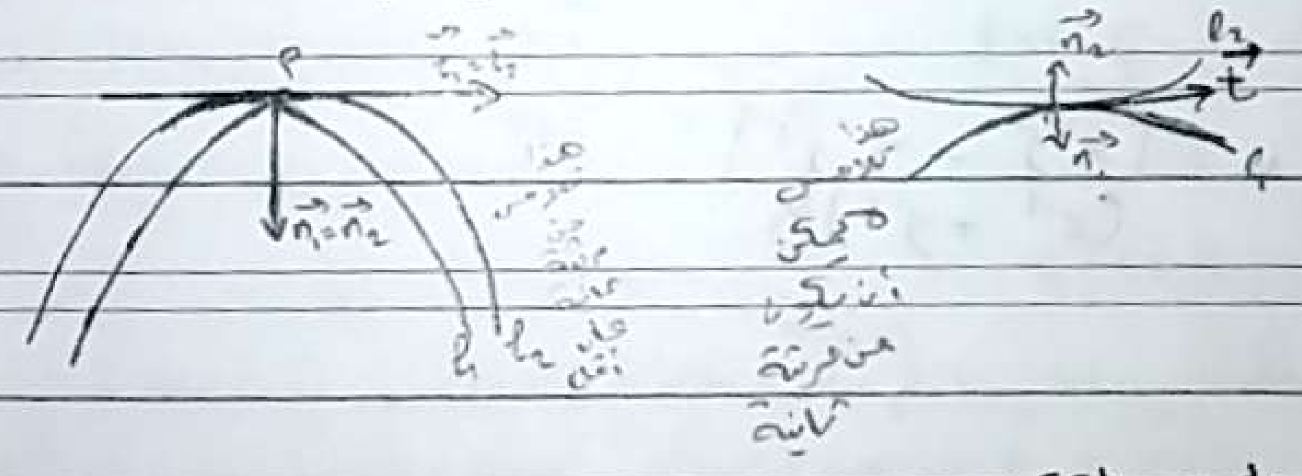
أي جميع نقاط الدائرة ليست معقوفة.

$$K = \frac{|a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t|}{(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t)^{3/2}} = \frac{a^2}{(a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a}$$

غير متعلق بـ t

مبرهنة: إذا كان $\mathcal{L}$ منحنٍ نظامي ( جميع نقاطه نظامية من صف $C_2$ فإن الشرط اللازم والكافي حتى يكون مستقيماً هو أن يكون تقوسه معدوماً في كل نقطة منه.

ملاحظة: إذا كانت P نقطة مشتركة لمنحنيين من صف $C_3$ فإن للمنحنيين تلامس من المرتبة الثانية على الأقل في P إذا كان لهما متجهاً واحداً مماس مشترك ومتجهاً واحداً ناظم أساسي مشترك وكذلك التقوس لهما مشترك في P.




تعريف دائرة التقوس:

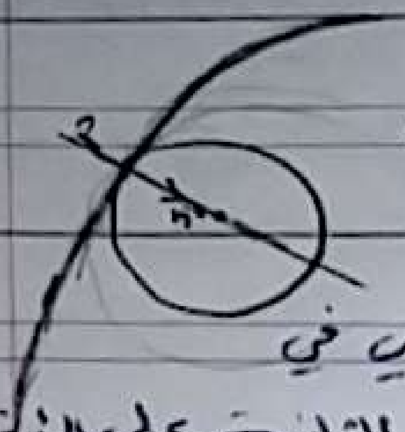
ليكن $\mathcal{L}$ منحنياً و P نقطة منه نقول عن الدائرة التي لها تلامس من أعلى مرتبة ممكنة مع المنحني في P بأنها الدائرة ملاصقة للمنحني في P أو بأنها دائرة تقوس للمنحني في P و نسمي مركز الدائرة بمركز تقوس المنحني في نقطة P

مبرهنة: يوجد في كل نقطة نظامية

ص ٢٤٥

وكبر تقوسة $(K \neq 0)$ لمنحنٍ من

صنف $C^2$ دائرة تقوس ، تقع هذه



الدائرة في المستوي الملاصق للمنحني في

نقطة P، ولها تلامس من المرتبة الثانية على الأقل مع المنحني

ونصف قطرها يساوي مقلوب التقوس المنحني في P وتقع

مركزها على نصف الناظم الأساسي الذي يتجه صوبه

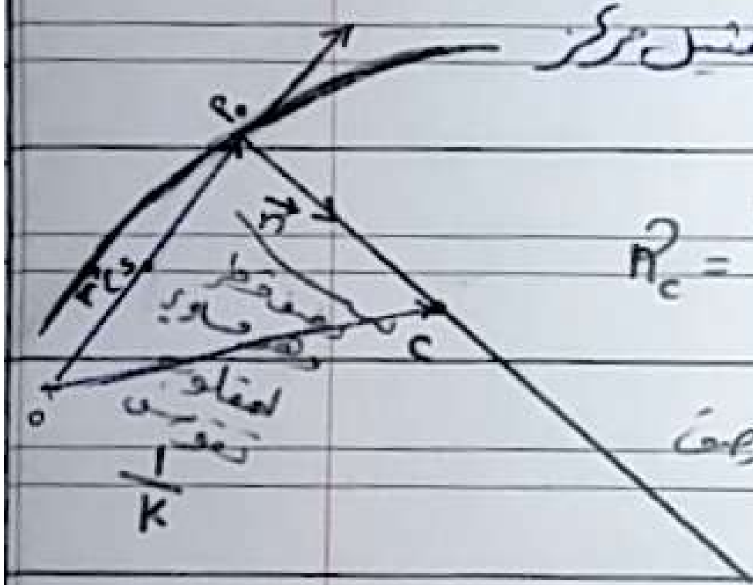
متجه واحدة الناظم الأساسي للمنحني.

إذاً متجه موضع مركز التقوس للمنحني الممثل بـ $\vec{r}(s)$ عند $s_0$ في النقطة $P_0$ هو

$$\vec{OC} = R_c = \vec{r}(s_0) + \frac{1}{K(s_0)} \vec{n}(s_0)$$

إذا تحركت نقطة $P_0$ عندها تصبح تمثل مركز تقوس:

$$R_c = \vec{r}(s) + \frac{1}{K(s)} \vec{n}(s)$$




نصف دائرة تقوس (1) موجودة في مستوي ملاصق

نقاطها تحقق معادلة مستوي ملاصق

دائرة تقوس مركزها هي مركز تقوس ونصف قطرها هو مقلوب تقوس

معادلة دائرة تقوس لمنحنٍ في نقطة هي تقاطع المستوي الملاصق للمنحني في تلك النقطة مع الكرة التي مركزها مركز تقوس ونصف قطرها هو مقلوب تقوس

$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2 = \frac{1}{K^2} \rightarrow \text{معادلة } 35$$