مبادئ الإحصاء والاحتمالات

الدكتور : احمد يونسو

المحاضرة : التاسعة عشرة

التاريخ : ٢٠١٦/١٢/١٣

إعداد : زهرة + شهيناز

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

محاضرة 19 ١٣ / ١٢ / ٢٠١٦م

- ليكن لدينا

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_n)$	$\dots$

$$f(x_2 < x \leq x_5) = f_{x_2}(x_2) + f_{x_3}(x_3) + f_{x_4}(x_4) + f_{x_5}(x_5)$$

- في حالة المتقطع

$$P(a \leq x < b) = F(b) - F(a)$$

$-(x \geq x_2) \quad (x < x_2)$

$$P(x \geq x_2) = 1 - P(x - x_2)$$

مثال:..

x	-1	$+1$	2
$f_x(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$-P(-1 < x \leq 2) = f_x(+1) + f_x(+2) = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$-P(x \geq +1) = f_x(+1) + f_x(+2) = \frac{3}{4}$$

$$-P(x < +1) = P(x = -1) = \frac{1}{4}$$

* حالة متغير Y كدالة لمتغير مستمر X

ليكن X متغيراً مستمراً كثافته الاحتمالية $f_x(x)$، ولنأخذ المتغير العشوائي $Y = g(x)$ حيث g دالة حقيقية

مبرهنة

إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً كثافته الاحتمالية $f_x(x)$، وكان Y متغيراً عشوائياً مرتبطاً بـ X وفق الدالة g حيث $Y = g(x)$، وكانت الدالة $g(x)$ مطردة متزايدة أو متناقصة وقابلة للاشتقاق فإن الكثافة الاحتمالية لـ Y تعطى بالشكل:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_x[g^{-1}(y)]\left|\frac{dx}{dy}\right| & : y = g(x) \\ 0 & : y \neq g(x) \end{cases}$$

ملاحظة:

- قد تكون $g(x)$ متزايدة على جزء من المجال المدروس I_1 ومتناقصة على الجزء الآخر I_2 في هذه الحالة نوجد كثافة Y على I_1 ولتكن $h_1(y)$ وكثافة Y على I_2 ولتكن $h_2(y)$، ويكون:

$$f_Y(y) = \begin{cases} h_1(y) + h_2(y) & , y = g(x) \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

مثال

- ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$f_x(X) = \begin{cases} \frac{x^2}{9} & : 0 < x < 3 \\ 0 & : \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب: أوجد كثافة الاحتمال للمتحول ~~عشوائي~~ عشوائي $Y = x^3$

الحل..

لدينا $Y = g(x) = x^3$ متزايدة، وقابلة على الاشتقاق على المجال $I =]0, 3[$ وإن:

$$g^{-1}(y) = x = \sqrt[3]{y} = y^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}$$

$y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} = y^{\frac{2}{3}}$

1

لدينا عندما: (تتغير قيم المتغير العشوائي Y ضمن مجال $Y=X^3$)

$$y=x^3\to 0 \Leftarrow x\to 0$$

$$y=x^3\to 27 \Leftarrow x\to 3$$

- بحسب المبرهنة

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(y^{\frac{1}{3}})\left|\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\right| & ; 0<y<27 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{(y^{\frac{1}{3}})^2}{9}\times\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} & ; 0<y<27 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{27} & ; 0<y<27 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

أي

$$f_X[g^{-1}(y)]=f_X(x)=f_X(y^{\frac{1}{3}})$$

$$=\frac{(y^{\frac{1}{3}})^2}{9}=\frac{y^{\frac{2}{3}}}{9}$$

ومنه فإن

$$f_X[g^{-1}(y)]\left|\frac{dx}{dy}\right|=\left(\frac{y^{\frac{2}{3}}}{9}\right)\left(\frac{y^{-\frac{2}{3}}}{3}\right)=\frac{1}{27}$$

وبالتالي

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{27} & ; 0<x<27 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

مثال..

ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً كثافته الاحتمالية

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad ; -\infty<x<+\infty$$

والمطلوب: أوجد كثافة الاحتمالية لـ $Y=X^2$

الحل..

- لدينا $g(x)=x^2$ في دالة متناقصة على المجال $]-\infty,0]=I_1$ ومتزايدة على المجال $I_2=[0,+\infty[$، وبالتالي لا تتحقق على المجال I_1

- ولدينا $y=x^2 \Rightarrow x=-\sqrt{y}=-y^{\frac{1}{2}}$

كما أن $x=g^{-1}(y)=-\sqrt{y}=-y^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{-1}{2\sqrt{y}} \Rightarrow h_1(y)=f_X[g^{-1}(y)]\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

$$=f_X(-y^{\frac{1}{2}})\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(-y^{\frac{1}{2}})^2}{2}}\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{y}{2}}$$

- ولدينا عندما

$$y\to+\infty \Leftarrow x\to-\infty$$

$$y\to 0 \Leftarrow x\to 0$$

أي أن $]0,+\infty[$

$$h_2(y)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}$$

- على المجال $I_2=[0\}$ لدينا:

$$g(x)=x^2 \Rightarrow y=x^2$$

$$x=g^{-1}(y)=\sqrt{y}=y^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

2

- ولدينا عندما:

$$y \to 0 \Leftarrow x \to 0$$
$$y \to +\infty \Leftarrow x \to +\infty$$

وبالتالي:

$$h_2(y) = f_x\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y^{\frac{1}{2}})^2}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{y}{2}} \quad ; \ ]0,+\infty[$$

$$\Longrightarrow f_Y(y) = \begin{cases} h_1(y) + h_2(y) & ; \ y = g(x) \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{y}{2}} & ; \ 0 < y < +\infty \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

انتهت المحاضرة..