Syria Math

البنى الجبرية 1

الدكتور: حمزة الحاكمي

المحاضرة : العشرون

التاريخ : ٣٠/١١/٢٠١٦

إعداد : أحمد أبو التوت

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

مبرهنة : لتكن G_1, G_2 زمرتين عندئذ :

١) $G_1 \oplus G_2 \cong G_2 \oplus G_1$

٢) $Z(G_1 \oplus G_2) = Z(G_1) \oplus Z(G_2)$

٣) كل من $G_1 \oplus < e_2 >, < e_1 > \oplus G_2$ زمرة جزئية في الزمرة $G_1 \oplus G_2$

٤) $G_1 \cong G_1 \oplus < e_2 >$ و $G_2 \cong < e_1 > \oplus G_2$

٥) $G_1 \oplus G_2$ تبديلية $\Leftrightarrow$ كلاً من G_1, G_2 تبديلية .

الاثبات :

١) لنعرف العلاقة : $f : G_1 \oplus G_2 \to G_2 \oplus G_1$ بالشكل التالي :

$$\forall (a_1, a_2) \epsilon G_1 \oplus G_2 \ ; \ f(a_1, a_2) = (a_2, a_1)$$

إن العلاقة هي تطبيق ومتباين لآنه :

$$\forall \ (a_1, a_2), (b_1, b_2) \epsilon G_1 \oplus G_2$$

فإن :

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$$

$$\Leftrightarrow a_1 = b_1 \quad , \quad a_2 = b_2$$

$$\Leftrightarrow (a_2, a_1) = (b_2, b_1)$$

$$\Leftrightarrow f(a_1, a_2) = f(b_1, b_2)$$

ومنه f تطبيق متباين .

وهو أيضا تشاكل :

$$f[(a_1, a_2).(b_1, b_2)] = f\big((a_1.b_1 , a_2.b_2)\big)$$

$$\overset{\text{حسب تعريف الجداء}}{\cong} (a_2.b_2 , a_1.b_1) = (a_2, a_1).(b_2, b_1) = f(a_1, a_2).f(b_1, b_2)$$

وهو أيضا غامر لان :

$$(x, y) \epsilon G_2 \oplus G_1 \quad \text{فإن} \quad x \epsilon G_2 , \ \ y \epsilon G_1$$

ومنه $(y, x) \epsilon G_1 \oplus G_2$

$$f(y, x) = (x, y)$$

ومما سبق نجد أن f تماثل .

٢) ليكن $(a,b) \epsilon Z(G_1 \oplus G_2)$
$; \ a \epsilon G_1 \quad , \quad b \epsilon G_2$

فإنه: $\forall (x,y) \epsilon G_1 \oplus G_2$

$$(a,b).(x,y) = (x,y).(a,b) = (ax,by) = (xa,yb)$$

$$ax = xa \implies a \epsilon Z(G_1)$$

$$by = yb \implies b \epsilon Z(G_2)$$

وهكذا فإن $(a,b) \ \epsilon \ Z(G_1) \oplus Z(G_2)$

أي أن $Z(G_1 \oplus G_2) \subseteq Z(G_1) \oplus Z(G_2)$

الاحتواء المعاكس :

ليكن $(c,d) \in Z(G_1) \oplus Z(G_2)$ يجب إثبات أنها تتبادل مع جميع عناصر الزمرة .

حيث $d \ \epsilon Z(G_2) \quad , \quad c \ \epsilon Z(G_1)$

$$\forall \ s,t \ \epsilon \ G_1 \oplus G_2$$

فإن $(s,t)(c,d) = (sc,td)$

$$\implies (sc,td) = (c,d)(s,t)$$

ومنه نجد فإن $\implies (c,d) \ \epsilon \ Z(G_1 \oplus G_2)$

$$\implies Z(G_1) \oplus Z(G_2) \subseteq Z(G_1 \oplus G_2)$$
$$\implies Z(G_1) \oplus Z(G_2) = Z(G_1 \oplus G_2)$$

٣) $G_1 \oplus < e_2 > = \{(a,e_2) \ ; \ a \ \epsilon \ G_1\} \subseteq G_1 \oplus G_2$

"هي مجموعة جزئية طالما كل عنصر من عناصرها هو عبارة عن ثنائية مسقطها الأول من G_1 و الثاني من G_2 وكما أنها غير خالية لأن :

$$(e_1,e_2) \ \epsilon \ G_1 \oplus < e_2 >$$

ليكن $(a,e_2) \ (b,e_2) \ \epsilon \ G_1 \oplus < e_2 >$ حيث $a,b \ \epsilon \ G_1$

وأن : $(a,e_2)(b,e_2)^{-1} = (a,e_2) \ (b^{-1},e_2) = \left(\underbrace{ab^{-1}}_{\epsilon \ G_1}, e_2\right) \epsilon \ G_1 \oplus < e_2 >$

وهذا يبين أن $G_1 \oplus < e_2 >$ زمرة جزئية في $G_1 \oplus G_2$ والثانية بشكل مماثل.

٤) لنعرف العلاقة : $g \ : \ G_1 \ \rightarrow G_1 \oplus < e_2 >$ بالشكل

$$\forall \ x \in G_1 \quad ; \ g(x) = (x, e_2)$$

نجد أن g تطبيق متباين لانه :

$$\forall \ x, y \ \in G_1 \text{ فإن } \quad x = y \ \Leftrightarrow \ (x, e_2) = (y, e_2) \Leftrightarrow g(x) = g(y)$$

وهو أيضا تشاكل لأن

$$g(x.y) = (x.y, e_2) = (x.y, e_2.e_2) = (x, e_2).(y, e_2) = g(x).g(y)$$

كما أن g غامر لأنه إذا كان $(z, e_2) \in G_1 \oplus < e_2 >$ عندئذ $z \in G_1$

نأخذ الصورة المباشرة $g(z) = (z, e_2)$.

ومنه $G_1 \cong G_1 \oplus < e_2 >$

بشكل مماثل نثبت التماثل الأخر .

٥) لدينا $G_1 \oplus G_2$ تبديلية ، و لنثبت أن كل من G_1, G_2 زمر تبديلية :

ليكن $a, a_1 \in G_1$ و $b, b_1 \in G_2$ عندئذٍ يكون : $(a, b), (a_1, b_1) \in G_1 \oplus G_2$ و لما كانت $G_1 \oplus G_2$ تبديلية فإن :

$$(a, b).(a_1, b_1) = (a_1, b_1).(a, b)$$

$$(a.a_1, bb_1) = (a_1 a, b_1 b) \Rightarrow \begin{cases} a.a_1 = a_1.a \ , & ((\forall a, a_1 \in G_1)) \\ b.b_1 = b_1.b, & ((\forall b, b_1 \in G_2)) \end{cases}$$

و بالتالي كلاً من G_1, G_2 زمرة تبديلية.

تمهيدية : لتكن G_1, G_2 زمرتين عندئذ : لنعرف العلاقة $f \ : \ G_1 \oplus G_2 \ \rightarrow G_1$ بالشكل

$$\forall (x, y) \in G_1 \oplus G_2 \quad ; \quad f(x, y) = x$$

هي تشاكل غامر .

البرهان : واضح أن f تطبيق وأنه تشاكل لانه :

$$\forall \ \ (a, b), (a_1, b_1) \in G_1 \oplus G_2$$

$$f[(a, b).(a_1, b_1)] = f(a.a_1 \ , b.b_1) = a.a_1 = f(a, b).f(a_1, b_1)$$

واخيرا انه غامر لآنه : $\forall x \in G_1$ فإن $(x, e_2) \in G_1 \bigoplus G_2$ وبأخذ الصورة المباشرة لها

$$f(x, e_2) = x$$

اي أن f غامر .

♥ملاحظة : يوجد تشاكلات غامرة بعدد الحدود الموجودة في الجداء .

مبرهنة : ليكن G_1, G_2 زمرة منتهية و $(a, b) \epsilon\, G_1 \bigoplus G_2$ عندئذ:

$$o(a, b) = Icm\big(o(a), o(b)\big)$$

الاثبات : لنفرض أن

$$o(a, b) = t \ , \qquad o(a) = m \ , \qquad o(b) = n$$

عندئذ : $(a, b)^t = (a^t, b^t) = (e_1, e_2)$

$\begin{cases} a^t = e_1 \\ b^t = e_2 \end{cases} \Leftarrow$ حسب التعريف نجد أن n يقسم t أيضا نجد أن m يقسم t

ومنه t مضاعف للعددين n, m وبالتالي

ولنفرض أن $s = \ Icm\big(o(a), o(b)\big)$

عندئذ يوجد $\lambda, \mu \ \epsilon\, Z$

$$s = \lambda . m$$

$$s = \mu . n$$

ومنه $(a, b)^s = (a^s, b^s) = \big(a^{\lambda . m}, b^{\mu . n}\big) = (e_1, e_2)$

ومنه t يقسم s وهذا يبين أن $\underbrace{t}_{\text{مرتبة}} \le s$

ومن جهة أخرى لما كان

$a^t = e_1$ فإن $t \ge m$

$b^t = e_2$ فإن $t \ge n$

وأن m, n يقسمان t وهذه يبين أن $t \ge s$ ومنه نجد أن $t = s$

اي أنه

$$o(a,b) = lcm(o(a), o(b)$$

مبرهنة : ((تعطي الشرط الازم والكافي كي يكون الجداء المباشر **لزمر** دوارة منتهية هو زمرة دوارة))

النص :

لتكن H, K زمرتين دوارتين منتهيتين فإن الشرط الازم والكافي كي تكون $H \oplus K$ زمرة دوارة منتهية هو أن تكون مرتبة كل من H, K أعداد أولية فيما بينها .

الإثبات :

لنفرض أن $\quad H =< h >: h \in H \quad , \quad K =< k >: k \in K$

ولنفرض أيضا أن $\quad (K:1) = o(k) = m$

$$(H:1) = o(h) = n$$

حسب ما وجدنا سابقا أن مرتبة أي زمرة دوارة تساوي مرتبة المولد لها .

$$o(k) = m \quad , o(h) = n$$

وأيضا $\quad \big((H \oplus K):1\big) = n.m$ و نريد اثبات أن :

$$\gcd(n,m) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{دوارة} \quad H \oplus K$$

◀لزوم الشرط :

لنفرض أن $H \oplus K$ دوارة

نفرض جدلا أن $\gcd(n,m) = t > 1$ وبما أن t يقسم كل من m, n فإن: $h^{\frac{n}{t}} \in H$ و مرتبته t و $k^{\frac{m}{t}} \in K$ و مرتبته t أي :

$$o\left(k^{\frac{m}{t}}\right) = t \quad , \quad o\left(h^{\frac{n}{t}}\right) = t$$

ومنه حسب المبرهنة السابقة : وبما ان $\left(h^{\frac{n}{t}}, e_k\right) \in H \oplus K$ و $\left(e_h, k^{\frac{m}{t}}\right) \in H \oplus K$

$$o\left(h^{\frac{n}{t}}, e_k\right) = lcm\,(t,1) = t$$

$$o\left(e_h, k^{\frac{m}{t}}\right) = lcm\,(1,t) = t$$

ومنه إن كل من الزمرتين :

$$< h^{\frac{n}{t}}, e_k > \quad \text{و} \quad < e_h, k^{\frac{m}{t}} > \; \epsilon \; H \oplus K$$

زمرتين جزئيتين في $H \oplus k$ وكل منها دوارة لها نفس المرتبة وهي t وهاتان الزمرتان مختلفتان .

فضلا عن ذلك :

$$< h^{\frac{n}{t}}, e_k > \neq < e_h, k^{\frac{m}{t}} >$$

وهذا غير ممكن حسب مبرهنة سابقة لنذكر بها

تذكرة : $G =< a >$ مرتبتها n و t يقسم n فإنها تحوي زمرة **وحيدة** $< a^{\frac{n}{t}} >$

مرتبتها t .

ومنه نجد تناقض وبالتالي $\gcd(n, m) = 1$.

◄كفاية الشرط :

لنفرض أن $\gcd(n, m) = 1$ عندئذ :

$$(h, k) \; \epsilon \; H \oplus K$$

ومنه $(< h, k >)$ زمرة جزئية في $H \oplus K$

$o(h, k) = lcm\left(o(h).o(k)\right) = n.m$ (لأن n.m أوليان فيما بينهما)

ومنه فإن $H \oplus K = (< h, k >)$

أي أن $H \oplus K$ دوارة .

نتيجة : لتكن $m > 1$ عدد صحيح وأن $m = n_1.n_2, \dots \dots .n_t$ اعداد صحيحة

عندئذ :

$$Z_m \cong Z_{n_1} \oplus Z_{n_2} \oplus \dots \dots \dots \oplus Z_{n_t}$$

عندما وفقط عندما n_i, n_j حيث $i \neq j$ أولية فيما بينها.

" انتهت المحاضرة "