بسم الله الرحمن الرحيم

مدرّس المقرّر : د. محمَّد الشيخ / تاريخ المحاضرة : 22/11/2016

الفصل الثالث : " المتتاليات والمتسلسلات العقديّة "

المتسلسلات العقديّة :

لتكن $\{z_n\}_{n\in A}$ متتالية عقديّة ، حيث: $A = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ، نسمّي المجموع من الشكل:

$$z_0 + z_1 + \cdots + z_n + \cdots$$

والّذي نرمزله اختصاراً بـ $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ ، متسلسلة عقدية حدّها العام هو z_n .

متتالية المجاميع الجزئية:

لنأخذ المتتالية $\{s_n\}$ ، المعرفة كما يلي:

$$s_0 = z_0$$

$$s_1 = z_0 + z_1$$

$$\vdots$$

$$s_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$$

نسمّي المتتالية $\{s_n\}$ ، بمتتالية المجاميع الجزئية (النونية) للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

تقارب متسلسلة عقدية:

نقول عن المتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} z_n$ إنّها متقاربة ، ومجموعها s إذا وفقط إذا كانت ، متتالية مجاميعها الجزئية لها $\{s_n\}$ متقاربة من s ، ويكون:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = s$$

أمّا إذا كانت s_n متباعدة نقول عن المتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} z_n$ إنّها متباعدة أي ليس لمجموعها معنى .

المتسلسلة العقدية الهندسية :

هي متسلسلة حدّها العام:

$$z_n = b.a^n \ ; \ \ b \neq 0$$

أي هي المتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b.a^n = b + ba^2 + \cdots + ba^n + \cdots$$

نسمّي b حدها الأول ، و a أساسها ، وتكون متتالية مجاميعها الجزئية:

$$s_n = b + b.a + ba^2 + \cdots + ba^n \quad \ldots (1)$$

نضرب الطرفين بـ a :

$$a.s_n = a.b + ba^2 + \cdots + ba^n + ba^{n+1} \quad \ldots (2)$$

بطرح (2) من (1) ، نجد:

$$(1-a).s_n = b - b.a^{n+1} \ldots (*)$$

<u>وعندئذٍ نميّز حالتين:</u>

(1) $a = 1$ فيكون الحد العام للمتسلسلة هو:

$$z_n = b \Rightarrow s_n = b.n \to \infty \; ; \; b \neq 0$$

أي إنَّ المتسلسلة عندها ستكون متباعدة.

(2) $a \neq 1$ من العلاقة $(*)$ ، نجد :

$$\boxed{s_n = \frac{b - b.a^{n+1}}{1-a}}$$

<u>وأيضاً سنميّز ثلاث حالات:</u>

١) $|a| > 1$ ، عندئذٍ بأخذ نهاية متتالية المجاميع الجزئية:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty \Rightarrow \text{متباعدة} \sum_{n=0}^{\infty} b.a^n$$

٢) $|a| < 1$ ، عندئذٍ:

$$\lim_{n\to\infty} a^{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{b}{1-a}$$

$\Leftarrow \sum_{n=0}^{\infty} b.a^n$ متقاربة ، ومجموعها : $\boxed{s = \frac{b}{1-a}}$

٣) $|a| = 1$ ، عندئذٍ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b.a^n \text{ متباعدة } \overset{\text{معيار الحد العام}}{\Leftarrow} |z_n| = |b.a^n| = |b|.|a^n| = |b| \to |b| \neq 0 \Rightarrow z_n \nrightarrow 0$$

نتيجة:

بفرض لدينا المتسلسلة الهندسية العقدية: $\sum_{n=0}^{\infty} b.a^n$ ، فإنها تكون متقاربة إذا وفقط إذا كان:

$$\boxed{|a| < 1}$$

وفي هذه الحالة مجموعها يحسب بالشكل:

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} b.a^n = \frac{b}{1-a}$$

حيث: b هو الحد الأول من المتسلسلة ، و a هو أساس المتسلسلة.

أمثلة:

1 $\sum_{n=0}^{\infty} i^n$ متسلسلة هندسية متباعدة لأنَّ أساسها: $a = i$ ، لكن: $|a| = |i| = 1$

2 ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3}\right)^n$ ، واحسب مجموعها في حال التقارب ، ثمَّ اكتبه بالشكل الجبري.

الجواب:

إن المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3}\right)^n$ هي متسلسلة عقدية أساسها: $a = \frac{1+i}{3}$ ، وبالتالي فإنَّ:

$$|a| = \left|\frac{1+i}{3}\right| = \frac{|1+i|}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$$

أي إنَّ المتسلسلة متقاربة ، ومجموعها:

$$s = \frac{b}{1-a} = \frac{\left(\frac{1+i}{3}\right)^2}{1 - \frac{1+i}{3}} = \frac{\frac{1+2i+i^2}{9}}{\frac{3-1-i}{3}} = \frac{2i}{6-3i}$$

ولنكتبه بالشكل الجبري:

$$s = \frac{2i}{6-3i} \cdot \frac{6+3i}{6+3i} = \frac{12i+6i^2}{36-9i^2} = \frac{12i-6}{36+9} = \boxed{-\frac{6}{45} + \frac{12}{45}i}$$

ملاحظة:

يجب التفريق بين تقارب الحد العام للمتسلسلة وتقارب المتسلسلة ،

فمثلاً: إنَّ المتتالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ متقاربة ، لكنَّ المتسلسلة $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة .

مبرهنة:

لتكن: $\sum_0^\infty z_n$ ، $\sum_0^\infty w_n$ متسلسلتان عقديتان تحققان ما يلي:

$$\exists\, n_0 \geq 0 \;;\; w_n = z_n$$

فإنَّ للمتسلسلتان الطبيعة ذاتها (متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً).

البرهان: لدينا:

$$\begin{cases} s_n = z_0 + \cdots + z_{n_0-1} + z_{n_0} + z_{n_0+1} + \cdots + z_n \\ T_n = w_0 + \cdots + w_{n_0-1} + w_{n_0} + w_{n_0+1} + \cdots + w_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow s_n - T_n = (z_0 - w_0) + (z_1 - w_1) + \cdots + \left(z_{n_0-1} + w_{n_0-1}\right) + 0 = c \in \mathbb{C}$$

وبالتالي:

$$\sum_0^\infty z_n \text{ متقاربة } \Leftrightarrow \{s_n\} \text{ متقاربة } \Leftrightarrow \{T_n\} \text{ متقاربة } \Leftrightarrow \sum_0^\infty w_n \text{ متقاربة } \blacksquare$$

مبرهنة (معيار الحد العام):

$$\sum_{k=0}^\infty z_n \text{ متقاربة } \Rightarrow z_n \to 0$$

الإثبات: لدينا:

$$s_{n-1} = z_0 + z_1 + \cdots + z_{n-1}$$
$$s_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n = s_{n-1} + z_n$$
$$\Rightarrow s_n - s_{n-1} = z_n$$

حيث:

$$\begin{pmatrix} s_n \to s \\ s_{n-1} \to s \end{pmatrix} \Rightarrow z_n \to (s - s) = 0$$

لكن العكس غير صحيح بالضرورة ، أي يمكن إيجاد متسلسلة حدّها العام يسعى إلى الصفر ،

وهي متباعدة **مثل** المتسلسلة: $\sum \frac{1}{n}$

مثال آخر:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})i \quad \text{متباعدة}$$

$$|(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})i| = \sqrt{n}-\sqrt{n+1} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \to 0$$

نتيجة:

إنَّ المبرهنة السابقة تستخدم للحكم على التباعد ففي حال كان الحد العام لمتسلسلة لا يسعى إلى الصفر ، عندئذٍ نحكم على المتسلسلة بأنّها متباعدة ، أي:

$$\boxed{\sum z_n \text{ متباعدة} \Leftarrow z_n \nrightarrow 0}$$

مثال:

ادرس تقارب المتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2i)^n$$

الحل:

$$|(2i)^n| = 2^n \to \infty \neq 0 \;\Rightarrow\; (2i)^n \nrightarrow 0$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2i)^n \quad \text{متباعدة}$$

انتهت المحاضرة ..

" ليس من جوهر الرياضيات الاهتمام بأفكار العدد أو الكم

إنَّ الرياضيات التي يجب علينا بناؤها هي رياضيات العقل البشري "

جورج بول

☺ لا تنسونا من صالح دعواتكم ☺

إعداد: خالد الشعار