بسم الله الرحمن الرحيم

مدرّس المقرّر : د. محمّد الشيخ / تاريخ المحاضرة : 12/10/2016

الفصل الأوّل : مجموعة الأعداد العقديّة (المركّبة)

خواص العدد العقدي $cis\ \theta$:

$$cis\ \theta = cos\ \theta + i.sin\ \theta$$

1) $|cis\ \theta| = 1\ ;\ \forall\ \theta \in \mathbb{R}$

2) $cis\ (2\pi k) = 1\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

3) $\overline{cis\ \theta} = cis\ (-\theta)\ ;\ \forall\ \theta \in \mathbb{R}$

4) $(cis\ \theta)^{-1} = \dfrac{1}{cis\ \theta} = \dfrac{\overline{cis\ \theta}}{cis\ \theta.\overline{cis\ \theta}} = \dfrac{cis\ (-\theta)}{|cis\ \theta|^2} = cis\ (-\theta)$

5) $cis\ \theta_1 = cis\ \theta_2 \ \Leftrightarrow\ \theta_1 = \theta_1 + 2\pi k\ ; k \in \mathbb{Z}$

6) $cis\ \theta_1.cis\ \theta_2 = cis\ (\theta_1 + \theta_2)$

برهان هذه الخاصة يتم بالاستفادة من العلاقتين:

$$cos(\theta_1 + \theta_2) = cos\ \theta_1 . cos\ \theta_2 - sin\ \theta_1 . sin\ \theta_2$$
$$sin(\theta_1 + \theta_2) = sin\ \theta_1 . cos\ \theta_2 + cos\ \theta_1 . sin\ \theta_2$$

7) $\dfrac{cis\ \theta_1}{cis\ \theta_2} = cis(\theta_1 - \theta_2)$

لأنَّ:

$$\frac{cis\ \theta_1}{cis\ \theta_2} = cis\ \theta_1.(cis\ \theta_2)^{-1} = cis\ \theta_1.cis\ (-\theta_2) = cis(\theta_1 - \theta_2)$$

في عملية القسمة هذه لا نشترط أنَّ : $cis\ \theta_2 \neq 0$ لأنَّ ذلك محقق دوماً كون :

$$\forall z \in \mathbb{C}:\ z = 0\ \Leftrightarrow |z| = 0$$

8) $(cis\ \varphi)^n = cis\ (n\varphi)\ ;\ n \in \mathbb{N}$

ولنثبت صحّتها من أجل $m \in \mathbb{Z}$ ، نميّز ثلاث حالات:

عندما: $m > 0$ فهذا صحيح وضوحاً كون $m = n \in \mathbb{N}$.

عندما: $m = 0$ فهذا صحيح كون : $(cis\ \varphi)^0 = 1 = cis\ (0\varphi)$.

عندما: $m < 0$ فإنَّ:

$$(cis\ \varphi)^m = (cis\ \varphi)^{-(-m)} = [(cis\ \varphi)^{-1}]^{-m} = \big(cis\ (-\varphi)\big)^{-m} = cis\ (-m)(-\varphi)$$
$$= cis\ (m\varphi)$$

- **جداء عددين عقديين مثلثياً:**

$$z_1 = r_1 . cis\theta_1 \ , z_2 = r_2 . cis\theta_2 \ \Rightarrow \ z_1 . z_2 = r_1 . r_2 \ cis(\theta_1 + \theta_2)$$

- **تعميم:**

$$z^n = r^n . cis(n\theta) \ ; \ n \in \mathbb{Z}$$

- **قسمة عددين عقديين مثلثياً:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{[r_1, \theta_1]}{[r_2, \theta_2]} = \left[\frac{r_1}{r_2}, \theta_1 - \theta_2\right] = \frac{r_1}{r_2} \ cis(\theta_1 - \theta_2) \ ; \ r_2 \neq 0$$

مثال:

$$(1+i)^{50} = \left(\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]\right)^{50} = \left[\left(\sqrt{2}\right)^{50}, \frac{50\pi}{4}\right] = \left[2^{25}, 6(2\pi) + \frac{\pi}{2}\right] = \left[2^{25}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 2^{25} . cis\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2^{25} . i$$

مثال٢:

اكتب العدد العقدي $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100}$ بالشكل الجبري :

الحل:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = \left(\frac{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]}{\left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]}\right)^{100} = \left(\left[1, \frac{\pi}{2}\right]\right)^{100} = i^{100} = i^{4(25)} = 1$$

ملاحظة:

إذا لم يكن البسط ذو زاوية شهيرة ، والمقام أيضاً زاويته غير شهيرة :

نقوم بضرب البسط والمقام بمرافق المقام ثمّ نحسب حاصل القسمة ، فتصبح الزوايا شهيرة في هذه الحالة .

دستور دوموافر:

$$(cis\ \theta)^n = cis\ (n\theta)$$
$$(cos\ \theta + i. sin\ \theta)^n = cos(n\theta) + i. sin(n\theta)$$

تمرين:

أوجد $cos\ 3\varphi$ بدلالة $cos\ \varphi$ باستخدام الأعداد العقديّة .

الحل:

حسب دوموافر فإنَّ:

$$(cis\varphi)^3 = cis\,3\varphi$$

$$l_1 = [\cos\varphi + i.\sin\varphi]^3$$
$$= \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi\,(i.\sin\varphi) + 3\cos\varphi\,(i.\sin\varphi)^2 + (i.\sin\varphi)^3$$
$$= (\cos^3\varphi - 3\cos\varphi.\sin^2\varphi) + i(3\cos^2\varphi.\sin\varphi - \sin^3\varphi)$$
$$l_2 = \cos 3\varphi + i.\sin 3\varphi$$

بالمطابقة نجد:

$$\cos^3\varphi - 3\cos\varphi.\sin^2\varphi = \cos 3\varphi$$
$$\Rightarrow \quad \cos^3\varphi - 3\cos\varphi.(1-\cos^2\varphi) = \cos 3\varphi$$
$$\Rightarrow \cos^3\varphi - 3\cos\varphi + 3\cos^3\varphi = \cos 3\varphi$$
$$\Rightarrow \boxed{\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi}$$

وبنفس الطريقة نجد:

$$\boxed{\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi}$$

جذر عدد عقدي:

نقول عن عدد عقدي z إنّه جذر من المرتبة n حيث $(n \geq 2)$ و $n \in \mathbb{N}$ للعدد العقدي a إذا كان :

$$z^n = a$$

كيفية إيجاد الجذور من المرتبة n لعدد عقدي:

ليكن a عدد عقدي عندئذٍ نميّز حالتين:

1) $a = 0$ فالجذر الوحيد لـ $a = 0$ هو صفر لأنَّ:

$$\forall z^n \neq 0 \Rightarrow z \neq 0 \Rightarrow \forall z^n = 0 \Rightarrow z = 0$$

2) $a \neq 0$ عندئذٍ يمكن أن نكتب :

$$a = |a|.cis\,\theta$$

وبفرض:

$$z = r.cis\,\varphi$$

نقول عن z إنّه جذراً لـ a من المرتبة n إذا حقّق:

$$(r.cis\,\varphi)^n = |a|.cis\,\theta$$

ويمكن استبدال الـ θ بالمعامل الرئيسي :

$$\Rightarrow (r.cis\,\varphi)^n = |a|.cis\,Arg\,(a)$$
$$\Rightarrow r^n.cis\,n\varphi = |a|.cis\,Arg\,(a)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^n = |a| \\ n\varphi = Arg\,(a) + 2\pi k \;\; ; \;\; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{|a|} \\ \varphi = \dfrac{Arg\,(a)}{n} + \dfrac{2\pi k}{n} \;\; ; \;\; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_k = \sqrt[n]{|a|}\,.\,cis\left(\frac{Arg\,(a) + 2\pi k}{n}\right) \;\; ; \;\; k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = \sqrt[n]{|a|}\,.\,cis\left(\frac{Arg\,(a)}{n}\right)$$

$$k = 1 \Rightarrow z_0 = \sqrt[n]{|a|}\,.\,cis\left(\frac{Arg\,(a)}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$k = n-1 \Rightarrow z_{n-1} = \sqrt[n]{|a|}\,.\,cis\left(\frac{Arg\,(a)}{n} + \frac{2\pi(n-1)}{n}\right)$$

$$k = n \Rightarrow z_n = \sqrt[n]{|a|}\,.\,cis\left(\frac{Arg\,(a)}{n} + \frac{2\pi n}{n}\right) = z_0$$

وبالتالي الجذور هي: $\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$ وهي مختلفة عن بعضها البعض.

و عندما جرّبنا $k = n$ عدنا إلى z_0 وسيكون $k = n + 1$ هو z_1 . وهكذا ..

ومنه نجد إنَّ الجذور المتمايزة للعدد العقدي a من المرتبة n هي n جذر . وهي:

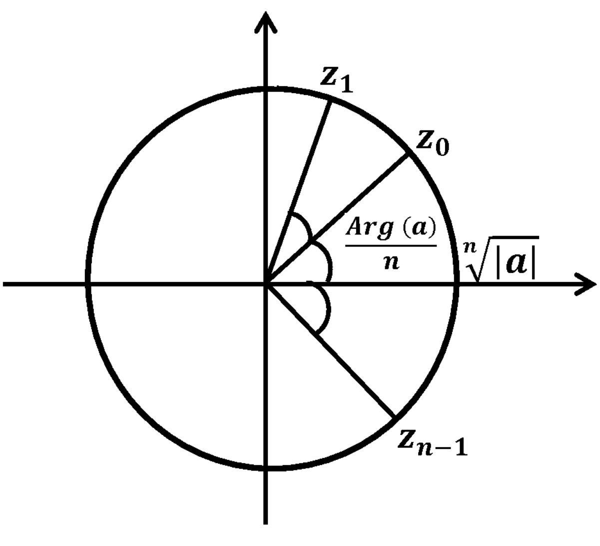
$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{|a|}\,.\,cis\left(\frac{Arg\,(a) + 2\pi k}{n}\right) \;\; ; \;\; k = 0,1,\dots,n-1}$$

- إن **الطويلة** لجذر عدد عقدي هي:

$$\boxed{|z_k| = \sqrt[n]{|a|} \;\; ; \;\; k \in \mathbb{Z}}$$

- وبما أنَّ جميع الجذور هي: $z_k = \sqrt[n]{|a|}\,.\,cis\left(\frac{Arg\,(a)+2\pi k}{n}\right)$ وذلك: $\forall\, k = 0,1,2,\dots,n-1$

فإنَّ جميع هذه الجذور تقع على الدائرة الّتي نصف قطرها : $\sqrt[n]{|a|}$:



مثال:

أوجد الجذور التكعيبية للعدد العقدي : $a = -8$ ثمَّ مثّلها في المستوي العقدي ،

أو : أوجد الحل للمعادلة التكعيبية : $z^3 + 8 = 0$ ؟

الحل:

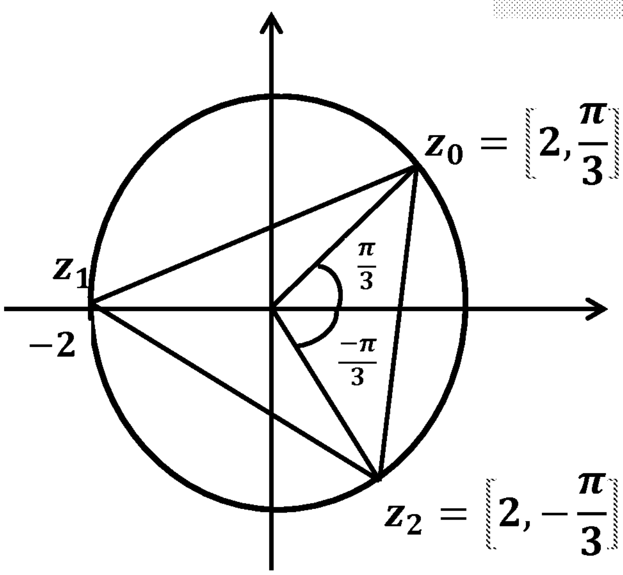
$z = [r, \varphi]$ جذر تكعيبي لـ -8 ، فيكون:

$$z^3 = -8$$
$$[r^3, 3\varphi] = [8, \pi]$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \Rightarrow r = 2 \\ 3\varphi = \pi + 2\pi k \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi k}{3} \end{cases} ; \ k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow z_k = 2.cis\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right) = \left[2, \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right] \ ; \ k = 0,1,2$$

$$k = 0 \ \Rightarrow \ z_0 = \left[2, \frac{\pi}{3}\right] = 2cos\frac{\pi}{3} + 2i.sin\frac{\pi}{3} = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}.i$$

$$k = 1 \ \Rightarrow \ z_1 = \left[2, \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right] = [2, \pi] = -2$$

$$k = 2 \ \Rightarrow \ z_2 = \left[2, \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right] = \left[2, \frac{5\pi}{3}\right] = \left[2, 2\pi - \frac{\pi}{3}\right] = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right]$$
$$= 2cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2i.sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2cos\frac{\pi}{3} - 2i.sin\frac{\pi}{3} = 1 - \sqrt{3}i$$



ملاحظة :

الجذور من المرتبة n لعدد عقدي هي:

رؤوس مضلّع منتظم عدد أضلاعه n ،

أي الجذور التكعيبية تشكّل مثلّث ،

والجذور من الدرجة الرابعة تشكّل مربّع ..

" انتهت المحاضرة "

بسم الله الرحمن الرحيم

مدرّس المقرّر : د. محمّد الشيخ / تاريخ المحاضرة : 17/10/2016

الفصل الأوّل : مجموعة الأعداد العقديّة (المركّبة)

__تمرين:__ عيّن الجذور التربيعية للعدد:

$$\boldsymbol{a = 3 + 2i}$$

من غير الواضح ما هي الزاوية لهذا العدد العقدي لأنّها من الزوايا غير الشهيرة لذلك نستخدم الشكل الجبري ،

بفرض z هو الجذر التربيعي للعدد a فإنَّ:

$$z = x + i.y \ \Leftrightarrow z^2 = 3 + 2i \ \Leftrightarrow (x + iy)^2 = 3 + 2i$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xiy = 3 + 2i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \ldots (1) \\ 2xy = 2 \qquad \ldots (2) \end{cases}$$

ولكن نعلم أنَّ :

$$|z|^2 = |3 + 2i| \Rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \ldots (3)$$

بجمع (1) و (3) نجد:

$$2x^2 = 3 + \sqrt{13} \ \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}$$

نعوّض في (2) :

$$y = \frac{1}{x} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+\sqrt{13}}}$$

وبالتالي نجد:

$$\boxed{z_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+\sqrt{13}}}.i} \ , \ \boxed{z_2 = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+\sqrt{13}}}.i}$$

__حل المعادلات العقدية من الدرجة الثانية :__

$$a\,z^2 + b\,z + c = 0 \ ; \ a \neq 0\,, a, b, c \ \text{ثوابت عقدية}$$

$$\Leftrightarrow a\left(z^2 + \frac{b}{a}\,z\right) + c = 0$$

نتمّم إلى مربع كامل :

$$\Leftrightarrow a\left(z^2+\frac{b}{a}\,z+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c=0$$

$$\Leftrightarrow \quad a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\underbrace{\frac{b^2-4a.c}{4a^2}}_{\text{عدد عقدي}}\right)=0$$

سنفرض δ جذر تربيعي لـ Δ :

$$\Delta = b^2-4a.c=\delta^2$$

نعوّض:

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2=0$$

$$\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z+\dfrac{b-\delta}{2a}=0 \Rightarrow z_1=\dfrac{-b+\delta}{2a} \\ z+\dfrac{b+\delta}{2a}=0 \Rightarrow z_2=\dfrac{-b-\delta}{2a} \end{cases}$$

<u>مثال:</u> أوجد جذور المعادلة:

$$z^4+z^2+1=0$$

بفرض: $w=z^2$ نجد :

$$w^2+w+1=0$$

$$\Delta=(1)-4(1)(1)=-3$$

$$\Rightarrow \quad \delta=\sqrt{3}.i$$

$$z^2=w_1=\frac{-1+\sqrt{3}.i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.i \ldots (1)$$

$$z^2=w_2=\frac{-1-\sqrt{3}.i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.i \ldots (2)$$

بحل (1):

$$\Rightarrow z'^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = w_1$$

بفرض:

$$z' = r.cis\ \varphi$$

جذر لـ w_1 ، نكتب w_1 بالشّكل المثلّثي :

$$r_{w_1} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1\ ,\ \ \varphi_{w_1} = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow (r.cis\ \varphi)^2 = cis\ \left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 1 \\ 2\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \varphi = \frac{\pi}{3} + \pi k\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{z_1 = cis\ \left(\frac{\pi}{3}\right)}\ ;\ k = 0 \\ \boxed{z_2 = cis\ \left(\frac{4\pi}{3}\right)}\ ;\ \ k = 1 \end{cases}$$

بحل (2):

$$z^2 = w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.i$$

بفرض:

$$z = r'.cis\ \theta$$

جذر لـ w_2 ، نكتب w_2 بالشّكل المثلّثي :

$$r_{w_2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1\ ,\ \ \theta_{w_2} = -\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow (r'.cis\ \ \theta)^2 = cis\ \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r'^2 = 1 \\ 2\theta = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\ ;\ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r' = 1 \\ \theta = -\frac{\pi}{3} + \pi k\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_k = \left[1, -\frac{\pi}{3} + \pi k\right]\ ; k = 0,1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{z_3 = \left[1, -\frac{\pi}{3}\right]} = cis\ \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 1\left[\cos -\frac{\pi}{3} + i.\sin -\frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{2} - i.\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ k = 0 \\ \boxed{z_4 = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]} = cis\ \left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \ k = 1 \end{cases}$$

<u>تمرين:</u>

أثبت أنّه إذا كانت الأمثال حقيقية للمعادلة :

$$\boldsymbol{a\,z^2 + b\,z + c = 0}\ ;\ a \neq 0\ ,\ \ a, b, c\ \in \mathbb{R}$$

فإنَّ الجذران لهذه المعادلة <u>مترافقان</u> . **(وظيفة).**

<u>المجموعة النقطيّة في المستوي العقدي:</u>

<u>أمثلة:</u>

$$\boldsymbol{1)\ \ Im\, z = 0}$$

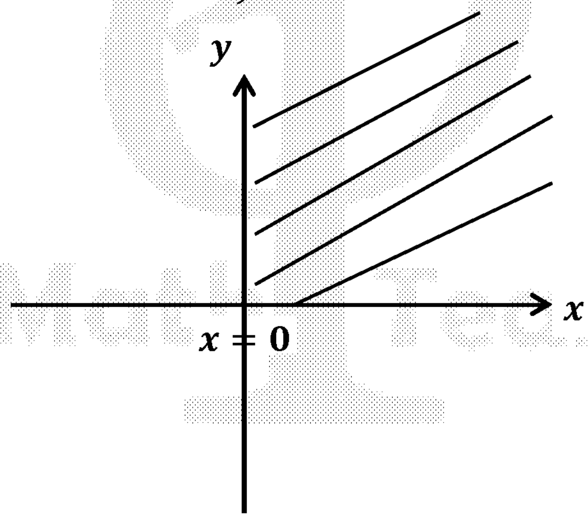
لتكن لدينا المجموعة :

$$\mathbb{C} \supseteq A = \{z \in\ \mathbb{C}\ ;\ Im\, z = 0\}$$

تمثّل المعادلة السابقة في المستوي العقدي المحور الحقيقي ox ..

ونقول اختصاراً إنَّ : $Im\ z = 0$ تمثّل ox .

$$\boldsymbol{2)\ \ Re\, z \geq 0}$$



المعادلة السابقة تمثّل القسم المظلّل ، أي هي نصف المستوي العقدي الأيمن الواقع على يمين المحور التخيّلي oy مع المحور .

$$\boldsymbol{3) -1 < Re\, z \leq 2}$$

تمثّل الشريط الشاقولي الواقع بين المستقيمين $Re\ z = -1$ و $Re\ z = 2$ دون الحافة اليسرى ومع الحافة اليمنى.

" انتهت المحاضرة "

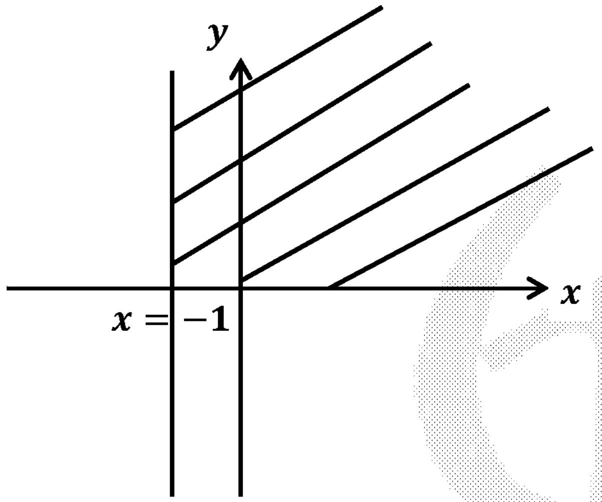
بسم الله الرحمن الرحيم

مدرّس المقرّر : د. محمّد الشيخ / تاريخ المحاضرة : 19/10/2016

الفصل الأوّل : مجموعة الأعداد العقديّة (المركّبة)

نتابع ما بدأنا به في المحاضرة السابقة بإعطاء أمثلة عن **المجموعات النقطية في المستوي العقدي**:

4) $Re\, z \geq -1$



ملحوظة:

في الرسم لو كنّا نريد المتراجحة $Re\, z > -1$ ،

أي لا نريد أن يكون المستقيم $Re\, z = -1$

داخل المجموعة فهناك حالتين للرسم :

الأولى: أن نرسم المستقيم منقط أي بالشكل : [⁞]

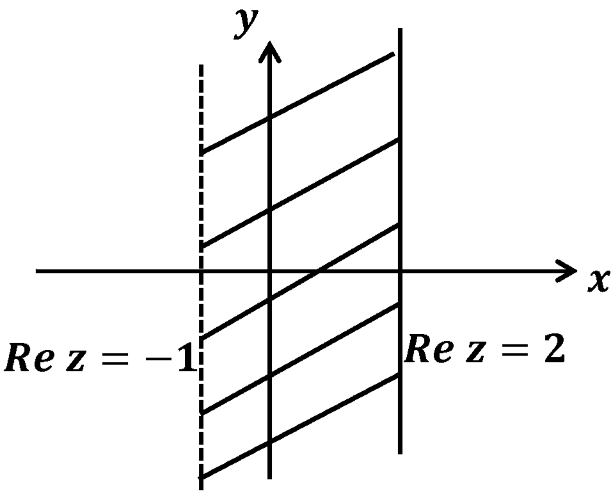
الثانية: أن نضع اشارات على المستقيم بالشكل :

[ǂ] ، وسترد بالأمثلة ..

المعادلة السابقة تمثّل القسم المظلّل ، أي هي تصف المستوي العقدي الواقع على يمين المستقيم $Re\, z = -1$ مع المستقيم $Re\, z = -1$.

---

5) $-1 < Re\, z \leq 2$



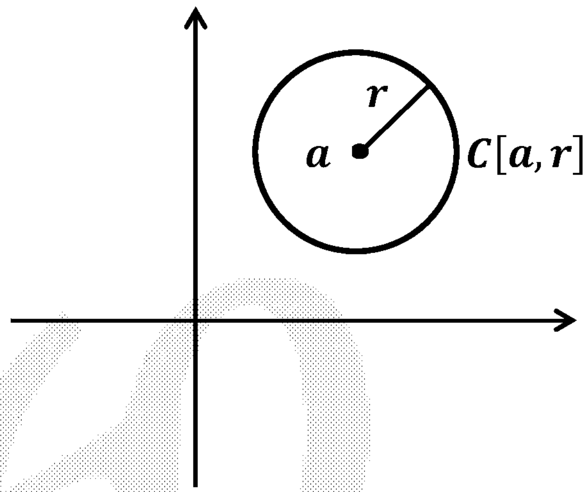
تمثّل الشريط الشاقولي الواقع بين المستقيمين $Re\, z = -1$ و $Re\, z = 2$ ،دون الحافة اليسرى ومع الحافة اليمنى ، ويمكن كتابتها على شكل مجموعة : $A = \{z \in \mathbb{C} : \ -1 < Re\, z \leq 2\}$

$$6)|z-a|=r$$

حيث: $r>0$ عدد حقيقي و a ثابت عقدي .

نعلم أنّ الطويلة $|z-a|$ تمثّل بعد z عن a ، وبالتالي عندما $r>0$ فإنَّ المعادلة السابقة تمثّل مجموعة نقاط المستوي الّتي بعدها عن a هو بعد ثابت r أي هو يمثّل دائرة مركزها a ونصف قطرها r ،

ونرمز لهذه الدائرة بـ $C[a,r]$. (نقصد بالدائرة محيط هذه الدائرة فقط وليس ماداخل الدائرة).



$$7)\ z=a+r.e^{i\theta}\ \ :\ \ 0\le\theta\le\pi$$

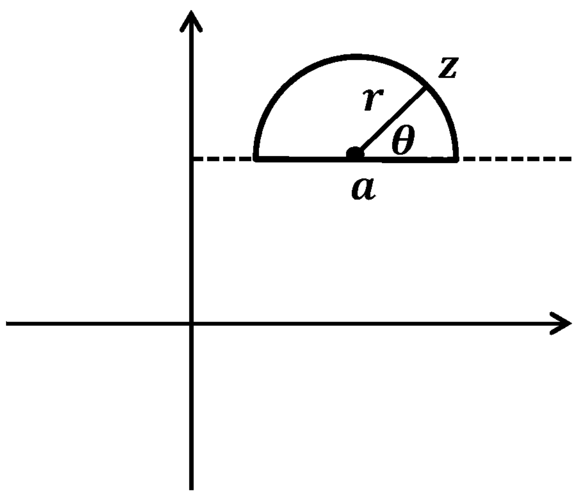
حيث: $r>0$ عدد حقيقي و a ثابت عقدي .

$$\Rightarrow z-a=r.e^{i\theta}\ \Rightarrow\ |z-a|=r\ ;\ |e^{i\theta}|=1$$

ومنه نجد أنَّ : z نقطة من الدائرة $C[a,r]$ ، ومن جهة أخرى إنَّ:

$$arg\ (z-a)=\theta\ ;\ \ :\ \ 0\le\theta\le\pi$$

أي عندما θ تمسح المجال $[0,\pi]$ فإنَّ z ستمسح نصف الدائرة $C[a,r]$ العلوي .



وإذا أخذنا : $z=a+r.e^{i\theta}\ \ :\ \ 0\le\theta\le2\pi$ فهي ستمسح الدائرة $C[a,r]$ كاملةً.

$$8)|z-a|<r$$

حيث: $r>0$ عدد حقيقي و a ثابت عقدي .

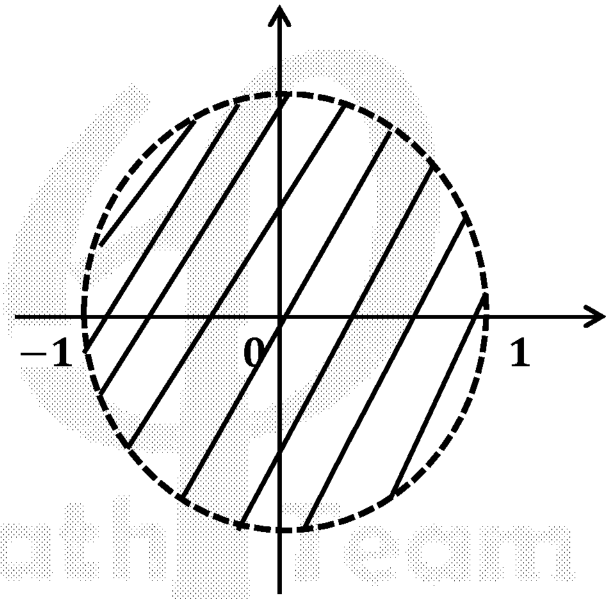
تمثّل المعادلة **القرص المفتوح** (ماداخل الدائرة دون محيطها) الذي مركزه a ونصف قطره r ، أي داخل الدائرة $C[a,r]$ دون محيطها.

إذا كانت المعادلة : $|z-a|\le r$ فإنّها ستمثّل **القرص المغلق** الذي مركزه a ونصف قطره r ،

أي: (الدائرة مع داخل الدائرة).

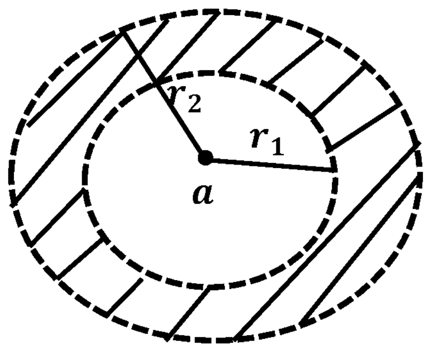
نرمز للقرص المفتوح بـ : $D(a,r)$ ، وللقرص المغلق بـ : $\overline{D(a,r)}$.

نسمي القرص $D(0,1)$ مركزه المبدأ ونصف قطره 1 ، **بقرص الواحدة** ، ونمثّله كما في الشكل التالي:



$$9)\ \ r_1<|z|<r_2$$

حيث: $r_1,r_2>0$ عددان حقيقيان و a ثابت عقدي .

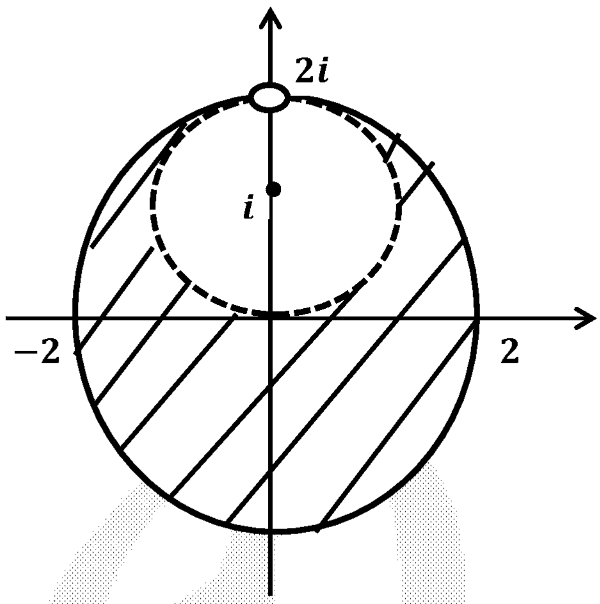


هذه المتراجحة تمثل الحلقة المفتوحة التي مركزها a ونصف قطرها الداخلي r_1 ، ونصف قطرها الخارجي r_2 .

نرمز لهذه الحلقة بالرمز : $a_{nn}(a,r_1,r_2)$.

تمرين:

مثل في المستوي العقدي : $D(0,2)/D(i,1)$

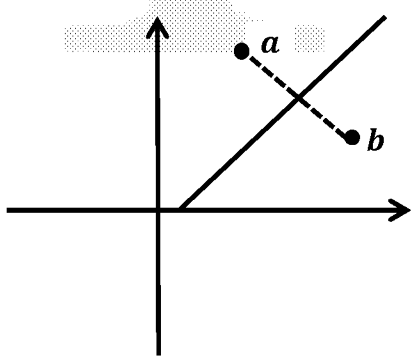


$$10)\ |z-a| = |z-b|$$

حيث a,b ثابتان عقديان.

في حالة: $a=b$ المعادلة تمثّل معادلة كل المستوي العقدي.

في حالة: $a \neq b$: يكون : $|z-a|$ تمثّل بعد z عن a ، و $|z-b|$ تمثّل بعد z عن b ، أي هو مجموعة الأعداد العقديّة الّتي يكون بعدها عن b مساوياً لبعدها عن a أي هو محور القطعة المستقيمة $[a,b]$:



تمرين (وظيفة):

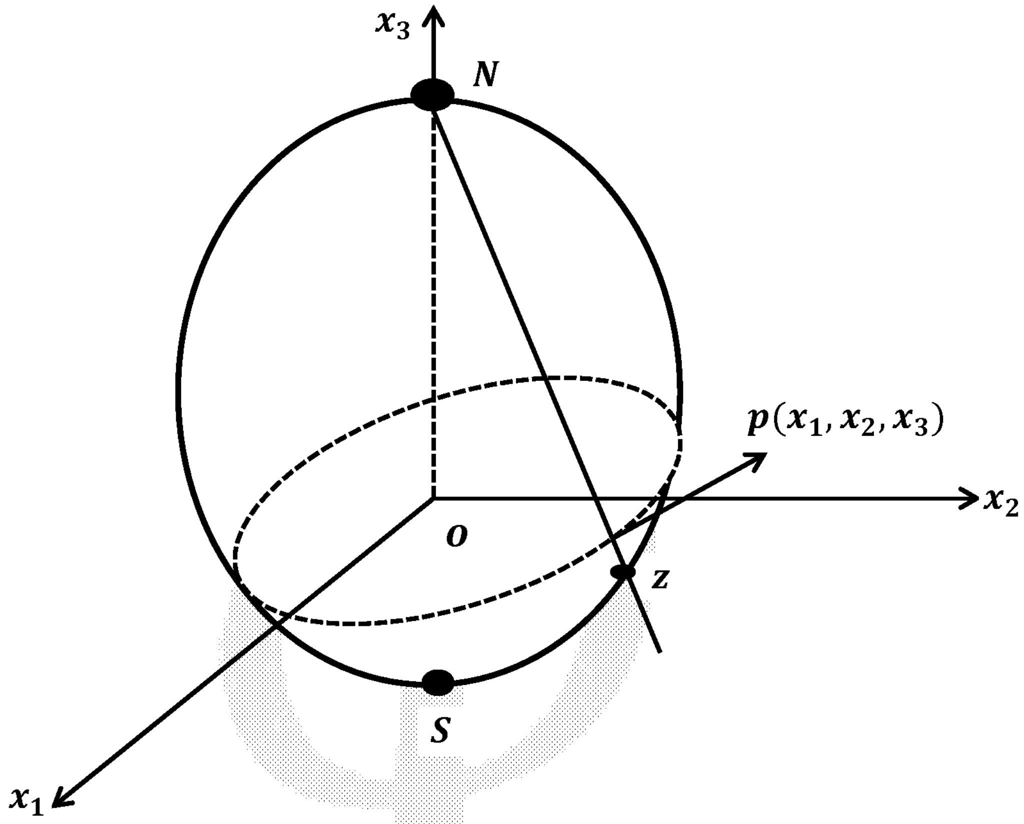
عين ماذا تمثّل المساواة التالية في المستوي العقدي:

$$|z-a| + |z-b| = r$$

حيث : $a,b \in \mathbb{C}\ ,\ \ r \in \mathbb{R}$

<u>التمثيل الكروي للأعداد العقديّة (الإسقاط المجسادي):</u>

نزوّد الفضاء الثلاثي البعد بجملة احداثيات متعامدة $ox_1x_2x_3$ ، لنمثّل الأعداد العقديّة في المستوي ox_1x_2 مستوي الأعداد العقديّة (المستوي العقدي) .



لنأخذ الدائرة الواحديّة الّتي مركزها المبدأ ، ونصف قطرها الواحد .

ونأخذ الكرة الواحدية بالفضاء التي مركزها الواحد ونصف قطرها الواحد .

$$s^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\; ; \;\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

وهي معادلة السطح الكروي (القشرة الكروية) ، وليكن $z = x + iy$ عدد عقدي في المستوي العقدي .

نصله مع القطب الشمالي ، ولتكن p نقطة التقاطع بين المستقيم المار من z و N ونسمّي p بالنقطة الممثّلة للعدد العقدي z على الكرة .

" انتهت المحاضرة "

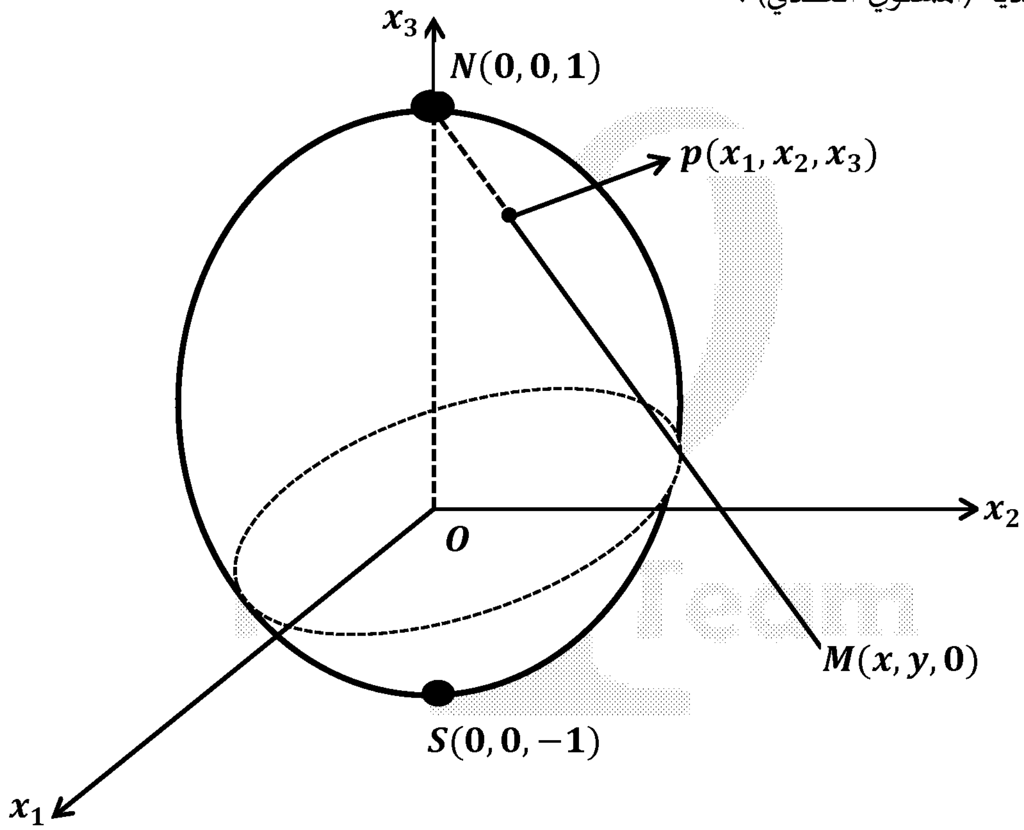
بسم الله الرحمن الرحيم

مدرّس المقرّر : د. محمّد الشيخ / تاريخ المحاضرة : 24/10/2016

الفصل الأوّل : مجموعة الأعداد العقديّة (المركّبة)

التمثيل الكروي للأعداد العقديّة (الاسقاط المجسادي):

نزوّد الفضاء الثلاثي البعد بجملة احداثيات متعامدة $Ox_1x_2x_3$ ، لنمثّل الأعداد العقديّة في المستوي Ox_1x_2 مستوي الأعداد العقديّة (المستوي العقدي) .



لنأخذ الدائرة الواحديّة الّتي مركزها المبدأ ، ونصف قطرها الواحد .

ونأخذ الكرة الواحدية بالفضاء التي مركزها الواحد ونصف قطرها الواحد .

$$s'' = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\; ; \;\; (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 1\}$$

وهي معادلة السطح الكروي (القشرة الكروية) ، وليكن $z = x + iy$ عدداً عقديّاً ، ولتكن $M(x,y,0)$ النقطة الممثّلة لـ z في المستوي العقدي ، نصله مع القطب الشمالي ، فنحصل على MN ولا يمكن أن يكون مماساً للسطح الكروي فهو سيقطعه بنقطتين احداهما N ولتكن الأخرى هي $p(x_1,x_2,x_3)$ ، ونسمّي p بالنقطة الممثّلة للعدد العقدي z على الكرة ، ونسمّي الكرة التي نمثّل عليها الأعداد العقديّة بكرة ريمان ، كما نسمّي p بالمسقط الكروي للعد العقدي z .

نلاحظ أنَّ كل نقطة على الكرة يقابلها عدد عقدي واحد من المستوي والعكس صحيح بالنتيجة إنَّ التطبيق الذّي يقرن كل عدد عقدي (من المستوي العقدي) بالنقطة الممثّلة له (يربط كل نفطة بمسقطها) على كرة ريمان هو تقابل ، ويدعى بالإسقاط المجسادي :

$$S'' - \{N\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

ملاحظات:

١) نقاط كرة ريمان الواقعة في النصف السفلي من الكرة تقابل أعداداً عقديّة في داخل دائرة الواحدة ،أي إنَّ صورة قرص الواحدة في المستوي العقدي وفق " الاسقاط المجسادي " هي النصف السفلي من سطح كرة ريمان (دون محيط القرص).

٢) إنَّ دائرة الواحدة من المستوي العقدي تبقى صامدة أمام الإسقاط المجسادي.

٣) نقاط كرة ريمان الواقعة في النصف العلوي تقابل أعداداً عقديّة واقعة خارج دائرة الواحدة في المستوي العقدي.

٤) صورة القطب الجنوبي S هي النقطة $O(0,0,0)$ مركز دائرة الواحدة.

٥) عندما p تسعى إلى N على سطح كرة ريمان فإنَّ صورتها في المستوي العقدي ستسعى إلى (∞) .

٦) بإضافة نهاية صورة p عندما $p \to \infty$ ، إلى المستوي العقدي نحصل على ما يسمّى المستوي العقدي الموسّع ونرمزله بـ $\mathbb{C}_\infty$.

٧) صورة دائرة غير مارة من القطب الشمالي على كرة ريمان ، هي دائرة على المستوي العقدي .

٨) أما إذا كانت الدائرة مارة من القطب الشمالي فإنَّ صورتها في المستوي العقدي ستكون مستقيماً.

من الممكن أن يكون العدد العقدي داخل الدائرة الواحديّة أو خارجها ،

تمرين ((وظيفة)):

أوجد العلاقة بين الاحداثيات الديكارتيّة للعدد العقدي ، القسم الحقيقي والقسم التخيّلي (x, y) ، وبيّن احداثيّات النقطة p المثّلة لذلك العدد على كرة ريمان ؟

فكرة الحل:

نلاحظ أنَّ $\overrightarrow{MN}$ مرتبط خطيّاً مع $\overrightarrow{Np}$ ، وبالتالي يمكن كتابة:

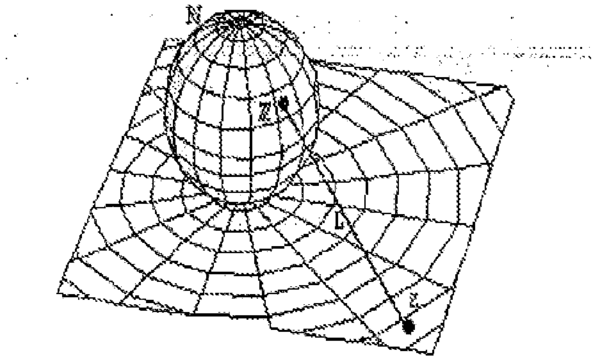
$$\overrightarrow{Np} = t.\overrightarrow{MN} \ ; t \in \mathbb{R}$$

حيث إنَّ المركّبات للأشعة معلومة وهي: $N(0,01)$ و $p(x_1, x_2, x_3)$ و $M(x, y, 0)$ بقي إيجاد t ، ولذلك نوجد معادلة المستقيم في الفضاء:

$$\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right) \dots (*)$$

بفصل أحد المعادلات الوسيطيّة أي بجعل $(*)$ مساوية لـ t ونأخذ ثلاث معادلات من t ونكمل الحل ..

شكل توضيحي (مجسّم) للإسقاط المجسادي:



وهكذا نكون قد أنهينا الفصل الأول وهو عبارة عن مفاهيم أساسية في " مجموعة الأعداد العقدية " ، والآن سننتقل إلى موضوع غاية في الأهمية وهو دراسة البنية الطبولوجيّة لعدد عقدي.

الفصل الثاني : البنية الطبولوجيّة للأعداد العقديّة

تمهيد:

عرفنا سابقاً أنّ $(\mathbb{C},+,.)$ مع عمليّتي الجمع والضرب بعدد يشكّل فضاء شعاعي (متّجهي) ، ولنعرّف عليه الدالة :

$$|.|:\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$z \longrightarrow |z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

وهذا تابع الطويلة ، وهو يحقق شروط النظيم (أثبت ذلك) ، ومنه $(\mathbb{C}\,,|.|)$ ، فضاء منظم .

تذكرة: شروط النظيم هي :

1) $||x|| \geq 0\ ;x \in \mathbb{C}$
2) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0\ \ ;x \in \mathbb{C}$
3) $||\lambda x|| = |\lambda|.||x||\ ;x \in \mathbb{C}\ ,\ \ \lambda \in \mathbb{R}$
4) $||x+y|| \leq ||x+z|| + ||z+y||\ ;x,y,z \in \mathbb{C}$

- وإنَّ كل فضاء منظّم هو فضاء متري ، لكن العكس غير صحيح بالضرورة ومنه فإنَّ $\mathbb{C}$ فضاء متري حيث إنَّ المسافة المعرّفة على $\mathbb{C}$ المولّدة من النظيم هي : $d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|$.
- وكل فضاء متري هو فضاء هو فضاء طبولوجي والعكس غير صحيح بالضرورة إذاً: $\mathbb{C}$ هو **فضاء طبولوجي** .

" انتهت المحاضرة "