بسم الله الرحمن الرحيم

مدرّس المقرّر : د. محمّد الشيخ / تاريخ المحاضرة : 26/10/2016

الفصل الثاني : ** تبولوجيا الأعداد العقدية **

علمنا سابقاً أنَّ $(\mathbb{C},+,.)$ مع عمليّتي الجمع والضرب بعدد يشكّل فضاء شعاعي (متّجهي) , ولنعرّف عليه الدالة :

$$|.|:\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$z \longrightarrow |z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

وهذا تابع الطويلة هو نظيم على $\mathbb{C}$, ومنه $(\mathbb{C}\,,|.|)$, فضاء منظم , وبالتالي هو فضاء متري

وإنَّ المسافة المعرّفة عليه المولّدة من النظيم هي : $d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$.

وبالتالي فإنّ: $\mathbb{C}$ هو **فضاء طبولوجي** .

بعض التعاريف الطبولوجيّة للأعداد العقديّة:

1) الكرة المفتوحة في $\mathbb{C}$:

والتي مركزها عدد حقيقي a ونصف قطرها r ((حيث r عدد حقيقي موجب)) هي :

$$N(a,r)=\{z\in\mathbb{C} : d(z,a)<r\}=\{z\in\mathbb{C} :\ |z-a|<r\}$$

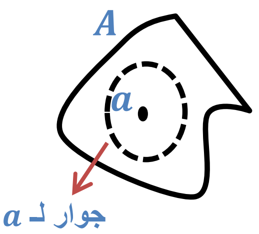
حيث إنَّ مجموعة النقاط في المستوي الّتي تحقّق أنَّ: $|z-a|<r$ هي القرص المفتوح الّذي مركزه a ونصف قطره r , أي:

$$N(a,r)=D(a,r)$$

* ومن الآن فصاعداً سنسمّي الكرة المفتوحة في $\mathbb{C}$ قرصاً مفتوحاً واختصاراً : (قرص في $\mathbb{C}$).

* ونسمّي $D(a,r)$ جواراً لـ a ونصف قطره r .

2) النقطة الداخليّة:



لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{C}$ $[A\subseteq\mathbb{C}]$ و, $a\in\mathbb{C}$ فنقول عن a إنّها داخليّة في A إذا وفقط إذا: وجد جوار لـ a محتوى في A , وهذا يكافئ وجود $0<r$ بحيث يكون : $D(a,r)\subseteq A$.

ونرمز لمجموعة النقاط الداخليّة للمجموعة A بالرمز: $\boxed{int\ A}$ أو: $\boxed{A^o}$.

ويكون $A^o\subseteq A$, وإنَّ العكس غير صحيح في الحالة العامة أي من الممكن وجود نقاط من A ولكنها ليست داخلية في A .

3) المجموعة المفتوحة:

نقول عن $A \subseteq \mathbb{C}$ إنَّها مجموعة مفتوحة إذا كانت جميع نقاطها داخلية فيها :

$$A \text{ مفتوحة } \Leftrightarrow (A = A^o)$$

4) المجموعة المغلقة:

تكون المجموعة $A \subseteq \mathbb{C}$ مغلقة إذا كانت متممتها في $\mathbb{C}$ هي مجموعة مفتوحة .

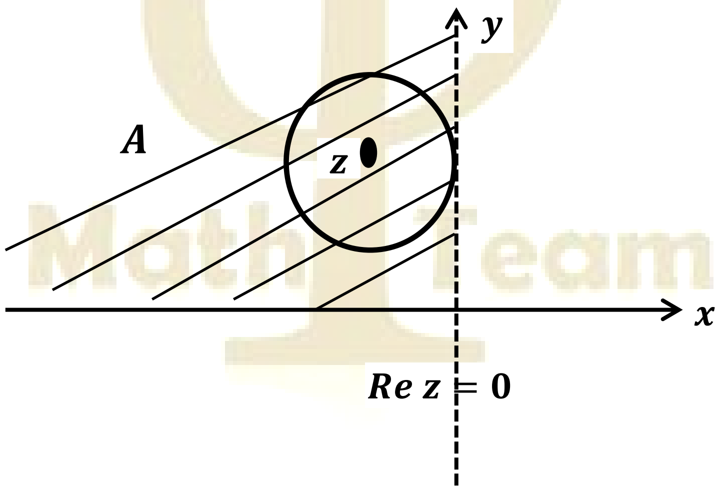
أمثلة:

$\boxed{1}$ كل قرص مفتوح في $\mathbb{C}$ هو مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$.

لأننا: إذا أخذنا قرص مفتوح , وأخذت نقطة من هذا القرص فإنَّ هذه النقطة لن تنتمي إلى المحيط لأنّه في الأصل ليس من المجموعة (القرص) .

$\boxed{2}$ $A = \{z \in \mathbb{C} : Re\, z < 0\}$ هي مجموعة مفتوحة .

إنَّ A هي النصف الأيسر من المستوي العقدي (دون المحور التخيلي oy) وهي مجموعة مفتوحة.



الإثبات:

لتكن : $z \in A$ ومنه: $Rez < 0$ ولنأخذ: $r_z = \frac{|Re\, z|}{2} > 0$ عندئذٍ وجد: $D(z, r_z) \subseteq A$

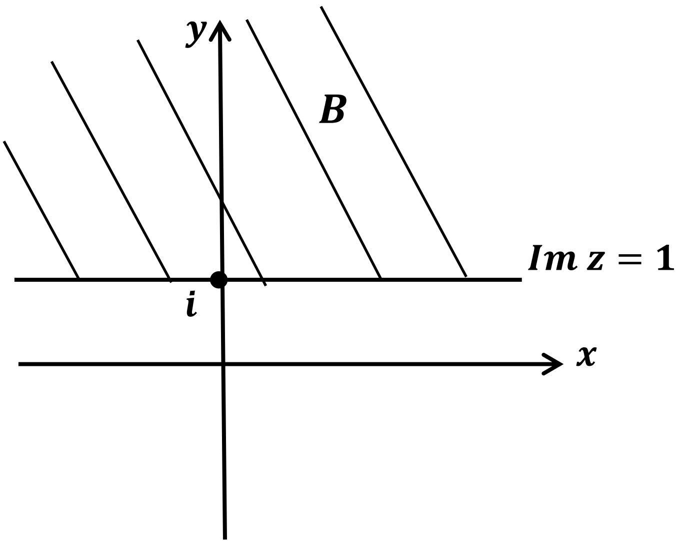
$$\Rightarrow z \in A^o \Rightarrow \begin{cases} A \subseteq A^o \\ A^o \subseteq A \end{cases} \Rightarrow A = A^o$$

ومنه A مفتوحة.

$\boxed{3}$ $B = \{z \in \mathbb{C} : Im\, z \geq 1\}$

إنَّ المجموعة B ليست مفتوحة ولإثبات ذلك يكفي إثبات أنَّ نقطة واحدة من المجموعة غير دّاخلية فيها .

تمثّل هذه المجموعة نصف المستوي العقدي الواقع فوق المستقيم $Im\, z = 1$ مع المستقيم ..



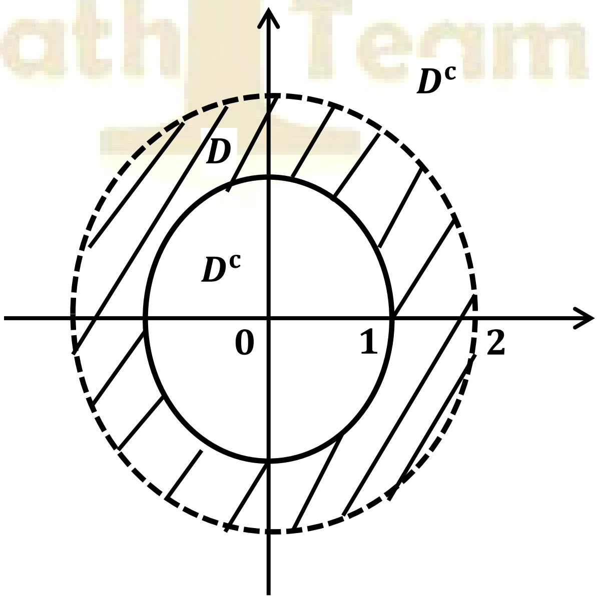
إنَّ المجموعة B غير مفتوحة , لأنّنا إن أخذنا النقطة $z = i$ والتي هي من B لأنَّ: $(Im\, i = 1)$

ولكن: $\forall\, r > 0 : D(i, r) \not\subseteq B$, أي مهما أخذنا جوار لهذه النقطة , ومهما صغّرنا نصف القطر فإنّه سوف يقع خارج المجموعة B وبالتالي هذه النقطة الواقعة على المستقيم: $Im\, z = 1$, ليست داخليّة (وكذلك جميع نقاط هذا المستقيم ليست داخلية) , وبالتالي B ليست مفتوحة .

وإنَّ B **مغلقة** لأنَّ متممتها : $B^c = \mathbb{C}/B = \{z \in \mathbb{C} : Im\, z > 1\}$, هي مجموعة مفتوحة .

((ومتممة B تمثّل نصف المستوي الواقع تحت المستقيم: $Im\, z = 1$ دون المستقيم)).

$\boxed{4}$ $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < 2\}$



تمثّل المجموعة D حلقة مركزها المبدأ ونصف قطرها الداخلي 1 وذلك مع أخذ النقاط للمحيط الداخلي ونصف قطرها الخارجي 2 وذلك دون نقاط المحيط الخارجي .

إنَّ المجموعة D ليست مفتوحة لأنّه إذا أخذنا أي نقطة من نقاط المحيط الداخلي (دائرة الواحدة) وجميع نقاطها هي نقاط من D فيكون القرص المفتوح الّذي مركزه أحد تلك النقاط ومهما صغّرنا نصف القطر سيكون جزء من هذا القرص خارج المجموعة D ومنه فإنَّ نقاط المحيط الداخلي ليست داخليّة في D ومنه D ليست مفتوحة , ولنأخذ متممة D , وهي :

$$D^c = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1 \ \wedge |z| \geq 2\}$$

في حال كانت D^c مفتوحة ستكون D مغلقة .

من الواضح إنَّ D^c ليست مفتوحة لأنّهُ بأخذ أيِّ نقطة تحقّق $|z| = 2$, (مثلاً لنأخذ $z = 2i$) فهي ليست داخلية لأنه بأخذ القرص المفتوح الّذي مركزه تلك النقطة ونصف قطره r فهما يكن r نستطيع إيجاد جزء من القرص خارج المجموعة ومنه ليست كل نقاط D^c داخليّة , ومنه D^c ليست مفتوحة , أي D ليست مغلقة .

$\boxed{5}$ كل قرص مغلق هو مجموعة مغلقة.

5) نقطة التراكم:

نقول عن a من $\mathbb{C}$ إنّها نقطة حديّة (تجمّع أو تراكم) لمجموعة $A \subseteq \mathbb{C}$ إذا وفقط إذا تقاطع أي جوار لـ a مع $A/\{a\}$ بنقطة واحدة على الأقل , وهذا يعني أنّه:

$$\forall r > 0 : \ D(a,r) \cap A/\{a\} \ \neq \phi$$

ونرمز لمجموعة نقاط تجمّع المجموعة A بـ A' ويسميها البعض بالمجموعة المشتقة , ونستطيع إثبات أنَّ:

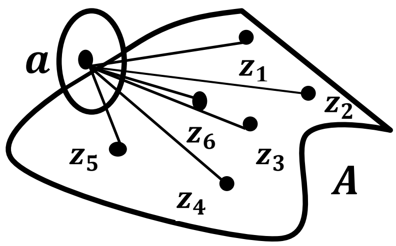
$$A' \subseteq A \ \Leftrightarrow A \text{ مغلقة}$$

ملاحظة:

إنَّ أي مجموعة منتهية (من أي فضاء متري بشكل عام) لا تملك نقاط تجمّع , أي لا يمكن لمجموعة منتهية في $\mathbb{C}$ أن تملك نقطة تجمّع .

الإثبات:

لتكن $A \subseteq \mathbb{C}$ ولتكن A مجموعة منتهية ولتكن النقاط:



$$z_1, z_1, z_3, z_4, z_5, z_6 \ \in A$$

لنفرض جدلاً أنَّ هناك نقطة تجمّع للمجموعة A هي a,

عندئذٍ نميّز حالتين:

1) a نقطة تجمّع بحيث : $a \notin A$

نحسب أبعاد النقطة a عن جميع عناصر المجموعة A

ثمَّ نأخذ Min المسافات وهو موجب أي (Min) هو بعد النقطة عن نقاط المجموعة (أصغر بعد) :

$$\delta = Min[(d(a,z_1)\ ,d(a,z_2)\ ,\dots,d(a,z_n)]\ ;\ \forall i > 0$$

نأخذ قرص مفتوح مركزه a ونصف قطره $\left(\frac{Min}{2}\right)$, فنلاحظ أنَّ :

$$D = \left(a\ ,\frac{\delta}{2}\right) \cap A = \phi$$

حيث D هو قرص نصف قطره هو بعد أقرب نقطة من a ويكون لا يحوي أي من النقاط , وبالتالي القرص لا يملك أي نقطة من المجموعة وبالتالي a ليست نقطة تراكم .

2) a نقطة تجمّع وبحيث : $a \in A$, نأخذ بعد النقطة عن نقاط المجموعة ثمَّ نأخذ Min الأبعاد :

$a \in A$ ولتكن $a = z_{i_0}$ حيث: $i_0 \in \{1,2,\dots,n\}$

$$\delta = Min\{d(a,z_i)\}\ ;\ \forall i \neq i_0$$

وثمَّ نأخذ قرص مركزه a ونصف قطره $\left(\frac{Min}{2}\right)$, فنلاحظ أنَّ :

$$D\left(a,\frac{\delta}{2}\right) \cap A/\{a\} = \phi$$

وبالتالي لا يوجد نقطة أخرى غير a في القرص, ومنه a ليست نقطة تراكم أي لا يوجد لـ A نقاط تجمّع .

" انتهت المحاضرة "

مع تحيات فرق الرياضيات الأول ^_^

☺ لا تنسونا من صالح دعائكم ☺

إعداد: خالد الشعار & روان الآغا