المعادلات التفاضلية 1

الدكتور : خليل يحيى

المحاضرة : الحادية عشرة والأخيرة

التاريخ : ٢٠١٦/١٢/٢١

إعداد : محمد شهلا & خالد الشعار

المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة n غير المتجانسة

وجدنا سابقاً أنّه لإيجاد الحل العام للمعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات الأمثال الثابتة ، يجب أن نوجد أوّلاً الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (دون طرفٍ ثانٍ) وليكن y_Q ، ثمَّ نوجد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة (مع طرفٍ ثانٍ) وليكن y_P ، وعندئذٍ يكون الحل العام للمعادلة هو :

$$y = y_Q + y_P$$

- ✓ ولقد درسنا قبلاً طريقة إيجاد y_Q ، لكن إيجاد الحل الخاص y_P ، يمكن أن يتم بطريقتين (كلاهما مطلوبتين) ، ودرسنا في المحاضرة السابقة إحدى الطريقتين (طريقة تشكيل الطرف الثاني) ، و الآن في هذه المحاضرة سنتعرّف على الطريقة الأخرى (طريقة لاغرانج) وهي طريقة شاملة بإمكاننا من خلالها إيجاد الحل العام لأي معادلة تفاضلية من هذا النوع.
- ✓ وسندرس في هذه المحاضرة أيضاً المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة n ذات الأمثال المتغيرة، والتي يمكن ردّها إلى معادلات خطية ذات أمثال ثابتة (معادلة أولر ، معادلة لوجندر)

لنبدأ معاً ☺ :

أولاً: إيجاد الحل العام للمعادلات الخطية غير المتجانسة ذات الأمثال الثابتة باستخدام طريقة تحويل الثوابت "طريقة لاغرانج":

نعلم أنَّ المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات الأمثال الثابتة من المرتبة n هي من الشكل:

$$a_0 . y^{(n)} + a_1 . y^{(n-1)} + a_2 . y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} . y' + a_n . y = g(x) \dots (1)$$

وإنَّ طريقة تحويل الثوابت (طريقة لاغرانج)، تمكننا من إيجاد الحل العام للمعادلة السابقة، إذا علم لها n حلاً مستقلاً خطيّاً، وبأخذ المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

نعلم أنَّ الحل العام لها هو من الشكل:

$$y = c_1 . y_1(x) + c_2 . y_2(x) + \cdots + c_n . y_n(x)$$

حيث: $c_1, c_2, \dots c_n$ ثوابت كيفية ، و: $y_1, y_2, \dots, y_n$ حلول مستقلة خطياً للمعادلة.

عندئذٍ تنص طريقة لاغرانج على ما يلي:

✓ نجعل الثوابت $c_1, c_2, \dots c_n$ دوال قابلة للمفاضلة تابعة لـ x: $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ ، فيكون:

$$y = c_1(x).\, y_1(x) + c_2(x).\, y_2(x) + \cdots + c_n(x).\, y_n(x)$$

$$\Rightarrow y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x).\, y_i(x) \dots (2)$$

وهو الحل الخاص للمعادلة (1) ، والهدف هو تحديد الدوال: $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$

✓ لذلك نشتق طرفي العلاقة (2) n مرة بالنسبة لـ x ، ونعوض في المعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ:

$$y' = \sum_{i=1}^{n} c_i(x).\, y_i'(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x).\, y_i(x)$$

لتحديد $c_i(x)$ نجعل الحد الثاني في الطرف الأيمن يساوي الصفر:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x).\, y_i(x) = 0 \;\Rightarrow\; y' = \sum_{i=1}^{n} V_i(x).\, c_i'(x)$$

نشتق مرة ثانية:

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} c_i(x).\, y_i''(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x).\, y_i'(x)$$

ومرة أخرى نجعل أيضاً الحد الثاني في الطرف الأيمن يساوي الصفر:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x).\, y_i'(x) = 0 \Rightarrow\; y' = \sum_{i=1}^{n} c_i(x).\, y_i''(x)$$

وهكذا نستمر بنفس الطريقة بالاشتقاق $(n-1)$ مرة حتى نصل إلى العلاقة التالية:

$$y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x).\, y_i^{(n-1)}(x) \;\; ; \;\; \sum_{i=1}^{n} c_i'(x).\, y_i^{(n-2)}(x) = 0$$

وأخيراً نشتق للمرة n فينتج لدينا:

$$y^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}c_i(x).y_i^{(n)}(x)+\sum_{i=1}^{n}c_i'(x).y_i^{(n-1)}(x)$$

✓ ثم نعوض $y',y'',\dots,y^n$ في المعادلة التفاضلية (1) فنحصل على العلاقة:

$$a_0\sum_{i=1}^{n}c_i'(x).y_i^{(n-1)}(x)+\sum_{i=1}^{n}c_i(x)\left[a_0y_i^{(n)}+a_1y_i^{(n-1)}+\dots+a_ny_i\right]=g(x)$$

ولكن بملاحظة أنَّ y_i هو حل للمعادلة التفاضلية المتجانسة فهذا يعني أنَّ الحدَّ الثاني في الطرف الأيمن يساوي الصفر:

$$\sum_{i=1}^{n}c_i(x)\left[a_0y_i^{(n)}+a_1y_i^{(n-1)}+\dots+a_ny_i\right]=0$$

$$\Rightarrow a_0\sum_{i=1}^{n}c_i'(x).y_i^{(n-1)}(x)=g(x)$$

✓ وبالتالي نلاحظ مما سبق:

$$\sum_{i=1}^{n}c_i'(x).y_i(x)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}c_i'(x).y_i'(x)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}c_i'(x).y_i''(x)=0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n}c_i'(x).y_i^{(n-1)}(x)=\frac{g(x)}{a_0}$$

وبالتالي فإنَّ جملة المعادلات هذه مؤلّفة من n معادلة جبرية غير متجانسة وتحوي n مجهولاً هي:

$$c_1'(x),c_2'(x),\dots,c_n'(x)$$

وبالتالي معيّن الأمثال لها هو عبارة عن معين الحلول الخاصة لها:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

وبما أنَّ هذا المحدّد (معين رونسكي) لا يساوي الصفر لأنَّنا ذكرنا بأن المعادلة غير متجانسة وهذه حلولها الخاصة تكون مستقلة خطيّاً ، وبالتالي يكون للجملة حل وحيد مخالف للصفر ومنه يمكن تحديد: $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ ، وهكذا حصلنا على الحل الخاص.

وبالمثال يتضح المقال ..

مثال:

باستخدام طريقة تحويل الثوابت (طريقة لاغرانج) ، أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{y'' - 2y' + y = e^{2x}}$$

الحل:

أولاً: نوجد الحل العام دون طرف ثانٍ:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

المعادلة المميزة لهذه المعادلة هي: $\lambda^2 - 2\lambda + \lambda = 0$

$$\Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

حالة الجذر مكرر ، وبالتالي الحل العام للمعادلة المتجانسة هو:

$$\boxed{y_Q = c_1 . e^x + c_2 x e^x}$$

ثانياً: نوجد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة (باستخدام طريقة لاغرانج):

نجعل الثوابت c_1, c_2 دوال قابلة للمفاضلة: $c_2(x), c_1(x)$

$$\Rightarrow y = c_1(x) . e^x + c_2(x) . x . e^x$$

نشتق:

$$\Rightarrow y' = c_1'(x)\,.\,e^x + c_1(x).\,e^x + c_2'(x).\,x.\,e^x + c_2(x).\,e^x + c_2(x).\,x.\,e^x$$

من هذه المعادلة نجعل:

$$c_1'(x)\,.\,e^x + c_2'(x).\,x.\,e^x = 0 \;...\,(*)$$
$$\Rightarrow y' = c_1(x).\,e^x + c_2(x).\,e^x + c_2(x).\,x.\,e^x$$

نشتق مرة ثانية:

$$\Rightarrow y'' = c_1'(x)\,.\,e^x + c_1(x).\,e^x + c_2'(x)\,.\,e^x + c_2(x).\,e^x + c_2'(x).\,x.\,e^x + c_2(x).\,e^x + c_2(x).\,x.\,e^x$$

نجعل:

$$c_1'(x)\,.\,e^x + c_2'(x)\,.\,e^x + c_2'(x).\,x.\,e^x = e^{2x} \;...\,(**)$$

بطرح $(*)$ من $(**)$ نجد:

$$\boxed{c_1'(x)\,.\,e^x + c_2'(x).\,x.\,e^x = 0}$$
$$-\;\boxed{c_1'(x)\,.\,e^x + c_2'(x)\,.\,e^x + c_2'(x).\,x.\,e^x} = e^{2x}$$
$$\Rightarrow c_2'(x)\,.\,e^x = e^{2x} \quad \Rightarrow c_2'(x) = e^x \quad \Rightarrow \; c_2(x) = e^x + c^1$$

نعوض $c_2'(x)$ بـ $(*)$:

$$c_1'(x)\,.\,e^x + x.\,e^{2x} = 0$$
$$\Rightarrow c_1'(x)\,.\,e^x = -xe^{2x} \;\Rightarrow\; c_1'(x) = -x.\,e^x$$
$$\Rightarrow \; c_1(x) = -\int x.\,e^x\,.\,dx$$

نكامل بالتجزئة:

$$x = u \Rightarrow du = dx$$
$$dv = e^x.x \;\Rightarrow v = e^x$$
$$\Rightarrow \; c_1(x) = -\left[x.\,e^x - \int e^x\,.\,dx\right] = -xe^x - e^x + c^2$$

وبالتالي الحل الخاص هو:

$$\boxed{y_P = [-xe^x - e^x + c^2].\,e^x + [e^x + c^1].\,x.\,e^x}$$

والحل العام المطلوب هو:

$$\boxed{y = y_Q + y_P = c_1.\,e^x + c_2xe^x + [-xe^x - e^x + c^2].\,e^x + [e^x + c^1].\,x.\,e^x}$$

مثال آخر:

باستخدام طريقة تحويل الثوابت (طريقة لاغرانج) ، أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{y'' + y = \tan x}$$

الحل:

أولاً: نوجد الحل العام دون طرف ثانٍ:

$$y'' + y = 0$$

المعادلة المميزة لهذه المعادلة هي:

$$\lambda^2 + \lambda = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = +i \ ,\ \lambda_2 = -i$$

وبالتالي الحل العام للمعادلة المتجانسة هو:

$$\boxed{y_Q = c_1.\cos x + c_2.\sin x}$$

ثانياً: نوجد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة (باستخدام طريقة لاغرانج):

نجعل الثوابت c_1, c_2 دوال قابلة للمفاضلة: $c_2(x), c_1(x)$

$$\Rightarrow y = c_1(x).\cos x + c_2(x).\sin x$$

نشتق:

$$\Rightarrow y' = c_1{}'(x).\cos x + c_2'(x).\sin x - c_1.\sin x + c_2(x).\cos x$$

من هذه المعادلة نفرض:

$$c_1{}'(x).\cos x + c_2'(x).\sin x \ \dots (*)$$
$$\Rightarrow y' = -c_1.\sin x + c_2(x).\cos x$$

نشتق مرة ثانية:

$$\Rightarrow y'' = -c_1'(x).\sin x + c_2'(x).\cos x - c_1(x).\cos x - c_2(x).\sin x$$

بالتعويض يكون:

$$-c_1'(x).\sin x + c_2'(x).\cos x = \tan x \dots (**)$$

من $(*)$ نجد:

$$c_1'(x).\cos x = -c_2'(x).\sin x \ \Rightarrow\ c_1'(x) = -c_2'(x).\frac{\sin x}{\cos x}$$

نعوض في $(**)$:

$$c_2'(x).\frac{\sin x}{\cos x}.\sin x + c_2'(x).\cos x = \tan x \;\Rightarrow\; c_2'(x)\left[\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \frac{\cos^2 x}{\cos x}\right] = \tan x$$

$$\Rightarrow c_2'(x).\frac{1}{\cos x} = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \;\Rightarrow\; c_2'(x) = \sin x$$

بالمكاملة يكون:

$$c_2(x) = -\cos x$$

ومنه فإنَّ:

$$c_1(x) = \frac{-\sin x\,.\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = -\frac{(1-\cos^2 x)}{\cos x} = -\frac{1}{\cos x} + \cos x$$

وبالتالي الحل الخاص هو:

$$\boxed{y_P = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}.\cos x - \cos x\,.\sin x = -\sin^2 x - \cos x\,.\sin x}$$

فالحل العام المطلوب هو:

$$\boxed{y = y_Q + y_P = c_1.\cos x + c_2.\sin x - \sin^2 x - \cos x\,.\sin x}$$

ثانياً: المعادلات التفاضلية التّي ترد إلى معادلات خطية ذات الأمثال الثابتة:

معادلة أولر:

وهي معادلة تفاضلية خطية ذات أمثال متغيرة (غير ثابتة) من الشكل:

$$a_0x^n.y^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x.y' + a_ny = f(x)$$

حيث: $a_0, a_1, \dots, a_n$ ثوابت.

لردّها إلى معادلة ذات أمثال ثابتة نستخدم التحويل التالي:

$$t = \ln x \;\Rightarrow x = e^t \;\Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t \;\Leftrightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = e^{-t}.\frac{dy}{dt} \quad ;\; e^{-t} = e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y_x' = \frac{1}{x}.y_t' \;\Rightarrow\; \boxed{y_t' = x.y_x'}$$

وبالاشتقاق مرة أخرى:

$$\frac{d2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}.\frac{dy}{dt}\right]=-\frac{1}{x^2}.\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}.\frac{d2y}{dt^2}$$

$$\Rightarrow y''_x=\frac{1}{x^2}(y''_t-y'_t)\Rightarrow \boxed{x^2.y''_x=(y''_t-y'_t)}$$

مثال (إضافي) ((١)):

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{x^2y''-2xy'+2y=0}$$

الحل:

نلاحظ أنَّ المعادلة لها شكل معادلة أولر، إذاً لردّها إلى معادلة ذات أمثال ثابتة، نفرض:

$$t=\ln x\ \Rightarrow x=e^t\ \Rightarrow \frac{dx}{dt}=e^t\ \Leftrightarrow \frac{dt}{dx}=e^{-t}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}=e^{-t}.\frac{dy}{dt}\quad ;\ e^{-t}=e^{-\ln x}=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y'_x=\frac{1}{x}.y'_t\ \Rightarrow \boxed{y'_t=x.y'_x}$$

ولدينا:

$$\frac{d2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}.\frac{dy}{dt}\right]=-\frac{1}{x^2}.\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}.\frac{d2y}{dt^2}$$

$$\Rightarrow y''_x=\frac{1}{x^2}(y''_t-y'_t)\Rightarrow \boxed{x^2.y''_x=(y''_t-y'_t)}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية يكون:

$$y''_t-y'_t-2y'_t+2y=0$$

$$\Rightarrow y''_t-3y'_t+2y=0$$

وهكذا ردت إلى معادلة خطية ذات أمثال ثابتة و المعادلة المميزة لهذه المعادلة هي:

$$\lambda^2-3\lambda+2=0\Rightarrow\ (\lambda-1)(\lambda-2)=0$$

$$\Rightarrow\ \lambda_1=1\ ,\ \ \lambda_2=2$$

وبالتالي الحل العام المطلوب هو:

$$\boxed{y=c_1.e^t+c_2e^{2t}=c_1.x+c_2x^2}$$

مثال (إضافي) ((٢)):

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x^2y'' + 3xy' + y = x$$

الحل:

نلاحظ أنَّ المعادلة لها شكل معادلة أولر، إذاً لردّها إلى معادلة ذات أمثال ثابتة، نفرض:

$$t = \ln x \Rightarrow x = e^t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t \Leftrightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t}$$

وإذا قمنا بنفس الخطوات في المثال السابق نجد:

$$\boxed{y'_t = x.y'_x} \ , \ \boxed{x^2.y''_x = y''_t - y'_t}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية يكون:

$$y''_t - y'_t + 3y'_t + y = e^t$$
$$\Rightarrow y''_t + 2y'_t + y = e^t$$

وهكذا ردت إلى معادلة خطية متجانسة ذات أمثال ثابتة:

أولاً: نوجد الحل العام دون طرف ثانٍ:

$$y''_t + 2y'_t + y = 0$$

المعادلة المميزة لهذه المعادلة هي: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$$\Rightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$ مكرر

وبالتالي الحل العام للمعادلة المتجانسة هو:

$$y = c_1e^{-t} + c_2.t.e^{-t}$$

ثانياً: نوجد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة:

من المعادلة التفاضلية نلاحظ أنّ: $\alpha = 1$ فنعوض في المعادلة المميزة

نلاحظ أنَّ $\alpha = 1$ ليس جذراً للمعادلة المميزة:

إذاً الحل الخاص من الشكل: $y_P = Ae^t$

لتعيين A : نشتق: $\Rightarrow y'_P = Ae^t$

$$\Rightarrow y''_P = Ae^t$$

نعوض في المعادلة (مع طرف ثانٍ):

$$Ae^t + 2Ae^t + Ae^t = e^t \quad \Rightarrow 4Ae^t = e^t$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

وبالتالي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة هو:

$$\boxed{y_P = \frac{1}{4}e^t}$$

والحل العام المطلوب هو:

$$Y = y + y_P = c_1e^{-t} + c_2.t.e^{-t} + \frac{1}{4}e^t = c_1\frac{1}{x} + c_2.\ln x\,.\frac{1}{x} + \frac{1}{4}x$$

$$\Rightarrow \boxed{Y = \frac{1}{x}(c_1 + c_2.\ln x) + \frac{1}{4}.x}$$

مثال المحاضرة الأصلي:

أوجد الحل للمعادلة التالية:

$$\boldsymbol{x^2y'' - xy' + 4y = \cos\ln x + x.\sin\ln x}$$

الحل:

نلاحظ أنّ هذه المعادلة هي معادلة أولر من المرتبة الثانية:

نفرض: $t = 1 + x \Leftarrow \quad x = e^t$

$$\frac{dt}{dx} = e^{-t} \Leftarrow \frac{dx}{dt} = e^t$$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = e^{-t}.\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}y'_t$$

$$\Rightarrow \boxed{x.y'_x = y'_x}$$

$$\frac{d2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}.\frac{dy}{dt}\right]$$

$$= -\frac{1}{x^2}.\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}.\frac{d2y}{dt^2} \Rightarrow y''_x = \frac{1}{x^2}(y''_t - y'_t) \Rightarrow \boxed{x^2y''_x = y''_t - y'_t}$$

بالتعويض نجد:

$$y_t'' - y_t' - y_t' + 4y_t = \cos t + e^t . \sin t$$
$$\Rightarrow y_t'' - 2y_t' + 4y_t = \cos t + e^t . \sin t$$

نوجد الحل العام دون طرف ثانٍ:

$$y_t'' - 2y_t' + 4y_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$$ المعادلة المميزة

$$\Delta = 4 - 4(1)(4) = -12 = 12i^2 \ \Rightarrow \ \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow \ \lambda_1 = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{2} = 1 + \sqrt{3}i \ \Rightarrow \ \lambda_2 = 1 - \sqrt{3}i$$

⇐ الحل العام:

$$y_t = e^t (A.\cos\sqrt{3}t + B.\sin\sqrt{3}t)$$

نوجد الحل الخاص مع طرفٍ ثانٍ، ونلاحظ هنا لدينا معادلتين:

$$(\text{أ}) \ldots y_t'' - 2y_t' + 4y_t = \cos t$$

$$(\text{ب}) \ldots y_t'' - 2y_t' + 4y_t = e^t . \sin t$$

لنأخذ المعادلة (أ) نلاحظ أنَّ:

$0 \mp i$ ⇐ نعوض في المعادلة المميزة فنجد أنّهُ ليس جذر للمعادلة المميزة

⇐ الحل الخاص من الشكل:

$$y_P = A.\cos t + B.\sin t$$
$$\Rightarrow y_P' = -A.\sin t + B.\cos t$$
$$\Rightarrow y_P'' = -A.\cos t - B.\sin t$$

نعوّض في المعادلة (أ):

$$-A.\cos t - B.\sin t + 2A.\sin t - 2B.\cos t + 4A.\cos t + 4B.\sin t = \cos t$$

$$\Rightarrow (3A - 2B).\cos t + (3B + 2A)\sin t = \cos t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3B + 2A = 0 \ \Rightarrow 2A = -3\,B \Rightarrow B = -\dfrac{2}{3}A \\ 3A - 2B = 1 \ \Rightarrow 3A - 2\left(-\dfrac{2}{3}A\right) = 1 \Rightarrow 3A + \dfrac{4}{3}A = 1 \ \Rightarrow \dfrac{13}{3}A = 1 \\ \Rightarrow A = \dfrac{3}{13} \ \ \Rightarrow B = -\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3}{13}\right) = -\dfrac{2}{13} \end{cases}$$

⇐ الحل الخاص هو:

$$y_{P1} = \frac{3}{13}cost - \frac{2}{13}sint$$

لنأخذ المعادلة (ب) نلاحظ أنَّ:

$1 \mp i$ ⇐ نعوض في المعادلة المميزة فنجد أنّهُ ليس جذر للمعادلة المميزة

⇐ الحل الخاص من الشكل:

$$y_P = e^t(A.cost + B.sint)$$
$$\Rightarrow y_P' = e^t(A.cost + B.sint) + e^t(-A.sint + B.cost)$$
$$\Rightarrow y_P'' = e^t(A.cost + B.sint) + e^t(-A.sint + B.cost) + e^t(-A.sint + B.cost) + e^t(-A.cost - B.sint)$$

نعوّض في المعادلة (ب):

$$e^t(A.cost + B.sint) + e^t(-A.sint + B.cost) + e^t(-A.sint + B.cost) + e^t(-A.cost - B.sint) - 2e^t(A.cost + B.sint) - 2e^t(-A.sint + B.cost) + 4e^t(A.cost + B.sint) = e^t.sint$$
$$\Rightarrow 3e^t(A.cost + B.sint) + e^t(-A.cost - B.sint) = e^t.sint$$

بالاختصار على e^t:

$$3(A.cost + B.sint) + (-A.cost - B.sint) = sint$$
$$\Rightarrow 3A.cost + 3B.sint - A.cost - B.sint = sint$$
$$\Rightarrow 2A.cost + 2Bsint = sint$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2A = 0 \ \Rightarrow A = 0 \\ 2B = 1 \ \Rightarrow B = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

⇐ الحل الخاص هو:

$$y_{P2} = \frac{1}{2}e^t.sint$$

⇐ الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$Y_t = y_t + y_{P1} + y_{P2}$$
$$\Rightarrow Y_t = e^t\left(A.cos\sqrt{3}t + B.sin\sqrt{3}t\right) + \frac{3}{13}cost - \frac{2}{13}sint + \frac{1}{2}e^t.sint$$

نعوّض قيمة t:

$$\boxed{Y = x\left(A.\cos\sqrt{3}\ln x + B.\sin\sqrt{3}\ln x\right) + \frac{3}{13}\cos\ln x - \frac{2}{13}\sin\ln x + \frac{1}{2}x.\sin\ln x}$$

معادلة لوجندر:

وهي معادلة تفاضلية خطية ذات أمثال متغيرة من الشكل:

$$a_0(ax+b)^n.y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(ax+b).y' + a_n y = g(x)$$

وهذه المعادلة تردُّ إلى معادلة أولر إذا استخدمنا التحويل:

$$ax + b = h$$

أو يمكن أن ترد إلى معادلة ذات أمثال ثابتة مباشرة باستخدام التحويل:

$$ax + b = e^t$$

مثال ((إضافي)):

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{(x+2)^2y'' - (x+2)y' + y = 3x + 4}$$

الحل:

نلاحظ أنَّ المعادلة لها شكل معادلة لوجندر، إذاً لردّها إلى معادلة ذات أمثال ثابتة، نفرض:

$$x + 2 = e^t \Rightarrow x = e^t - 2$$

$$t = \ln(x+2) \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x+2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x+2}.\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow y'_t = \frac{1}{x+2}.y'_x$$

ولدينا:

$$y''_x = \frac{d2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x+2}.\frac{dy}{dt}\right] = -\frac{1}{(x+2)^2}.\frac{dy}{dt} + \frac{1}{(x+2)^2}.\frac{d2y}{dt^2}$$

$$\Rightarrow y''_x = \frac{1}{(x+2)^2}(y''_t - y'_t) \Rightarrow (x+2)^2.y''_x = (y''_t - y'_t)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية يكون:

$$y_t'' - y_t' - y_t' + y = 3(e^t - 2) + 4$$

$$\Rightarrow y_t'' - 2y_t' + y = 3e^t - 2 \ldots (*)$$

وهكذا ردت إلى معادلة خطية متجانسة ذات أمثال ثابتة:

أولاً: نوجد الحل العام دون طرف ثانٍ:

$$y_t'' - 2y_t' + y = 0$$

المعادلة المميزة لهذه المعادلة هي: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$$\Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ مكرر}$$

وبالتالي الحل العام للمعادلة المتجانسة هو:

$$y = c_1 e^t + c_2 . t . e^t$$

ثانياً: نوجد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة:

من المعادلة التفاضلية نلاحظ أنّ: $\alpha = 1$ فنعوض في المعادلة المميزة

نلاحظ أنَّ $\alpha = 1$ يمثل جذراً مضاعفاً للمعادلة المميزة:

إذاً الحل الخاص من الشكل: $y_P = At^2 e^t + B$

$$\Rightarrow y_P' = 2At . e^t + At^2 e^t + 0$$

$$\Rightarrow y_P'' = 2A . e^t + 2At . e^t + 2Ate^t + At^2$$

$$= 2A . e^t + 4At . e^t + At^2$$

نعوض في المعادلة $(*)$ (مع طرف ثانٍ):

$$2A . e^t + 4At . e^t + At^2 - 4At . e^t - 2At^2 e^t + At^2 e^t + B = 3e^t - 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2Ae^t + B = 3e^t - 2 \Rightarrow 2A = 3 \Rightarrow A = \dfrac{3}{2} \\ B = -2 \end{cases}$$

وبالتالي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة هو:

$$y_P = \frac{3}{2} t^2 e^t - 2$$

والحل العام المطلوب هو:

$$Y = y + y_P = c_1 e^t + c_2.t.e^t + \frac{3}{2}t^2 e^t - 2$$

$$\Rightarrow \boxed{Y = c_1(x+2) + c_2.(x+2).ln(x+2).+\frac{3}{2}(x+2).ln^2(x+2) - 2}$$

مثال المحاضرة الأصلي:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{(x+2)^2 y'' - 6(2x+1)y' + 16y = 8(2x+1)^2}$$

الحل:

نلاحظ أنَّ المعادلة لها شكل معادلة لوجندر، إذاً لردّها إلى معادلة ذات أمثال ثابتة، نفرض:

$$2x + 1 = e^t \Rightarrow x = \frac{e^t - 1}{2}$$

$$t = ln(2x+1) \ \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{2}{2x+1}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{2}{2x+1}.\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \ y'_t = \frac{2}{2x+1}.y'_x$$

ولدينا:

$$y''_x = \frac{d2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{2}{2x+1}.\frac{dy}{dt}\right] = -\frac{4}{(2x+1)^2}.\frac{dy}{dt} + \frac{4}{(2x+1)^2}.\frac{d2y}{dt^2}$$

$$\Rightarrow y''_x = \frac{4}{(2x+1)^2}(y''_t - y'_t) \Rightarrow (2x+1)^2.y''_x = 4(y''_t - y'_t)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية يكون:

$$4(y''_t - y'_t) - 12y'_t + 16y_t = 8e^{2t}$$

$$\Rightarrow y''_t - 4y'_t + 4y_t = 2e^{2t} \ldots (*)$$

وهكذا ردت إلى معادلة تفاضلية خطية (مع طرفٍ ثاني) من المرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة:

لحلها نتبع ما يلي :

أولاً: نوجد الحل العام دون طرف ثانٍ:

$$y_t'' - 4y_t' + 4y_t = 0$$

المعادلة المميزة لهذه المعادلة هي: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$$\Rightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = 2 \text{ مكرر}$$

وبالتالي الحل العام للمعادلة المتجانسة هو:

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 . t . e^{2t}$$

ثانياً: نوجد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة:

من المعادلة التفاضلية نلاحظ أنّ: $\alpha = 2$ فنعوض في المعادلة المميزة

نلاحظ أنَّ $\alpha = 2$ يمثل جذراً مضاعفاً للمعادلة المميزة:

إذاً الحل الخاص من الشكل:

$$y_P = At^2 e^{2t}$$

نشتق الطرفين:

$$\Rightarrow y_P' = 2At.e^{2t} + 2At^2 e^{2t}$$

نشتق مرة أخرى:

$$\Rightarrow y_P'' = 2A.e^{2t} + 2At.e^{2t} + 4Ate^{2t} + 4At^2 e^{2t}$$
$$= 2A.e^{2t} + 8At.e^{2t} + 4At^2 e^{2t}$$

نعوض y, y', y'' في المعادلة $(*)$ (مع طرف ثانٍ) ، ونجد بالتعويض والاختصار أنَّ:

$$A = 1$$

وبالتالي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة هو:

$$y_P = t^2 e^{2t}$$

والحل العام المطلوب هو:

$$Y = y + y_P = c_1 e^{2t} + c_2 . t . e^{2t} + t^2 e^{2t}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y = c_1(2x+1)^2 + c_2 . (2x+1)^2 . ln(2x+1) . + (2x+1)^2 . ln^2(2x+1)}$$

انتهى المقرر..

☺ لا تنسونا من صالح دعواتكم ☺