بسم الله الرحمن الرحيم

مدرّس المقرّر : د. محمّد الشيخ　/　تاريخ المحاضرة : 7/12/2016

جداء المتسلسلات:

سنعرض عدة طرق لتعريف جداء متسلسلتين:

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} z_n \ , \sum_{n=0}^{\infty} w_n$ ولنرمز بِ P_n الحد العام لجدائهما

(أي $\sum P_n$ متسلسلة الجداء لمتسلسلتين سابقتين) يمكن تعريف P_n بعدة طرق نذكر منها:

الطريقة الأولى: P_n مشكلة وفق الخطوط المائلة:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\overbrace{z_0w_0}^{p_0} & \rightarrow & \overbrace{z_0w_1}^{p_1} & \swarrow & \overbrace{z_0w_2}^{p_3} & \swarrow & \overbrace{z_0w_3}^{p_6} & \cdots \\
\overbrace{z_1w_0}^{p_2} & \swarrow & \overbrace{z_1w_1}^{p_4} & \swarrow & \overbrace{z_1w_2}^{p_7} & \swarrow & z_1w_3 & \cdots \\
\overbrace{z_2w_0}^{p_5} & \swarrow & \overbrace{z_2w_1}^{p_8} & & z_2w_2 & & z_2w_3 & \cdots
\end{array}$$

أي:

$$P_0 = z_0.w_0 \ , \ P_1 = z_0.w_1 \ , \ P_2 = z_1.w_0 \ , \ P_3 = z_0.w_n \ , \ \dots$$

الطريقة الثانية: مشكلة وفق المربعات:

$$\begin{array}{ccccccc}
\overbrace{z_0w_0}^{p_0} & \rightarrow & \overbrace{z_0w_1}^{p_1} & & \overbrace{z_0w_2}^{p_4} & \overbrace{z_0w_3}^{p_9} & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\
\overbrace{z_1w_0}^{p_3} & \leftarrow & \overbrace{z_1w_1}^{p_2} & & \overbrace{z_1w_2}^{p_5} & \overbrace{z_1w_3}^{p_{10}} & \cdots \\
 & & & & \downarrow & & \\
\overbrace{z_2w_0}^{p_8} & \leftarrow & \overbrace{z_2w_1}^{p_7} & \leftarrow & \overbrace{z_2w_2}^{p_6} & z_2w_3 & \cdots
\end{array}$$

الطريقة الثالثة: مشكلة وفق كوشي:

تسمى متسلسلة الجداء في هذه الحالة الجداء الكوشي للمتسلسلتين وهي جميع الخطوط المائلة:

$$P_o = z_0.w_0 \ , \ P_1 = z_0.w_1 + z_1.w_0 \ , \ P_2 = z_0.w_2 + z_1.w_1 + z_2.w_0$$

$$\begin{array}{cccccc} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & & \\ z_0w_0 & z_0w_1 & z_0w_2 & z_0w_3 & .. & .. \\ z_1w_0 & z_1w_1 & z_1w_2 & z_1w_3 & .. & .. \\ z_2w_0 & z_2w_1 & z_2w_2 & z_2w_3 & .. & .. \\ & & p_4 & & & \end{array}$$

$$P_n = z_0w_n + z_1w_{n-1} + \cdots + z_nw_0$$

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} z_k . w_{n-k}$$

أي $\sum P_n$ في هذه الحالة هي جداء كوشي للمتسلسلتين $\sum z_n$, $\sum w_n$ أو متسلسلة الجداء لكوشي لهاتين المتسلسلتين وعندما نقول أوجد الجداء (أوجد جداء المتسلسلتين) فنقصد به جداء كوشي.

ملاحظة:

١) إن تقارب إحدى متسلسلات الجداء المعرفة بالطرق السابقة لا يؤدي بالضرورة إلى تقارب باقي المتسلسلات أما إذا كانت أحدها متقاربة بالإطلاق فإن جميعها ستكون متقاربة بالإطلاق ويكون لجميعها المجموع ذاته.

٢)إن تقارب متسلسلتين لا يقتضي بالضرورة تقارب متسلسلة الجداء (جداء كوشي) لهما.

مثال:

أثبت أن المتسلسلة التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \quad \text{متقاربة}$$

وأنَّ

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)^2 \quad \text{متباعدة}$$

وهي متسلسلة الجداء لِ $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ بِنفسها... ((وظيفة))

فكرة للحل:

أولاً المتسلسلة متقاربة حسب شروط ليبتنز وهي متقاربة كمتسلسلة حقيقية وبالتالي متقاربة كمتسلسلة عقدية .

ثانياً نأخذ متتالية كوشي لتشكيل الـ P_n وذلك بالاستفادة من نشر ثنائي الحد وسوف نبيّن أنَّ P_n لا تسعى للصفر أي أنَّ $|P_n|$ أكبر من عدد ما ذلك أياً كان n عندها تكون متسلسلة الجداء متباعدة حسب اختبار الحد العام.

مبرهنة ميرتن:

إذا كانت إحدى المتسلسلتين $\sum z_n$ ، $\sum w_n$ متقاربة بالإطلاق والأخرى متقاربة فإن متسلسلة الجداء لهما (جداء كوشي) هي متسلسلة متقاربة، وإنَّ مجموع متسلسلة الجداء للمتسلسلتين يساوي جداء مجموعهما ، لكنَّ العكس غير صحيح بالضرورة كما في المثال السابق.

مبرهنة (٢):

إذا كانت المتسلسلتان $\sum z_n$ ، $\sum w_n$ ومتسلسلة الجداء لهما $\sum P_n$ متقاربات (أي الثلاث متقاربات) فإنَّ مجموع متسلسلة الجداء يساوي جداء مجموعي المتسلسلتين $\sum z_n$ ، $\sum w_n$.

تمرين:

ليكن z_1, z_2 عددين عقديين كيفيين ، أثبت أن المتسلسلتين التاليتين:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1)^n}{n!} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_2)^n}{n!}$$

متقاربتين بالإطلاق ، ثمَّ عيّن متسلسلة الجداء لهما ، وأوجد مجموعها.

الحل:

ليكن z عدداً عقديّاً كيفيّاً (ثابت كيفي) ، ولنثبت أنَّ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ متقاربة بإطلاق:

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} = \frac{1}{n+1}|z| \to |z|$$

حسب معيار دالامبير فإنَّ: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ متقاربة بالإطلاق ، ومنه فإنَّ: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1)^n}{n!}$ ، $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_2)^n}{n!}$ متقاربتان بإطلاق ، ومنه حسب **مبرهنة ميرتن** فإنَّ متسلسلة الجداء لهما متقارب ، ولنرمز لها بـ : $\sum P_n$

نأخذ: $w_k = \frac{z_2^k}{k!}$ ، $z_k = \frac{z_1^k}{k!}$ ، وإنَّ :

$$P_n = \sum z_n . w_{n-k} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} . z_1^k . z_2^{n-k} = \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}$$

ومتسلسلة الجداء هي:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}}_{:=e^{z_1+z_2}}=\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1)^n}{n!}\right)}_{:=e^{z_1}}\cdot\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_2)^n}{n!}\right)}_{:=e^{z_2}}$$

ملاحظة:

يعرّف التابع الأسي عقدياً بأنّه:

$$f\ :\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$$

$$z\to e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

ووفق التمرين السابق يمكن إثبات أنَّ:

$$\boxed{\sum P_n=e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}}$$

متسلسلات القوى العقدية (المتسلسلات الصحيحة):

لتكن $\{a_n\}$ متتالية عقدية وَ z_0 ثابتاً عقدياً وَ z متحولاً عقدياً ، نسمّي المتسلسلة العقدية التي حدّها العام من الشكل: $a_n(z-z_0)^n$ ، أي المتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=a(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots$$

هي متسلسلة قوى مركزها z_0 وأمثالها حدود المتتالية $\{a_n\}$ كما نسمي a_0 بثابت هذه المتسلسلة.

أمثلة:

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

متسلسلة قوى مركزها المبدأ ومتتالية أمثالها هي: $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty}sin\left(\frac{\pi}{n}\right)z^n$$

متسلسلة قوى عقدية مركزها المبدأ ، ومتتالية أمثالها هي: $\left\{sin\frac{\pi}{n}\right\}$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n}$$

متسلسلة قوى عقدية مركزها $-i$ ، ومتتالية أمثالها هي: $\left\{a_n = \frac{1}{n}\right\}$

مبرهنة:

إذا كانت $\sum a_n(z-z_0)$ متسلسلة قوى عقدية ، فيوجد عدد: $r \in \overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

يجعل هذه المتسلسلة متقاربة بالإطلاق في القرص المفتوح $D(z_0, r)$ و متباعدة خارجه.

(*) نسمّي العدد r نصف قطر تقارب المتسلسلة ونسمّي القرص $D(z_0\ , r)$ قرص تقارب المتسلسلة.

مثال:

إنَّ قرص تقارب المتسلسلة $\sum \frac{z^n}{n}$ هو قرص الواحدة لأنَّ المتسلسلة تكون متقاربة بالإطلاق داخله ومتباعدة خارجه وإنَّ نصف قطر تقاربها هو $r = 1$.

" انتهت المحاضرة "

تفريغ: هالة السليمان

تنضيد وتدقيق: محمد خالد الشعار

☺ لا تنسونا من صالح دعواتكم ☺