البنى الجبرية 1

الدكتور: حمزة الحاكمي

حل اسئلة الدورات

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

حل أسئلة دورة الفصل الأول عام ٢٠١٥/٢٠١٦

السؤال الاول :

١) لتكن N, Z مجموعتي الأعداد الصحيحة والطبيعية على الترتيب ,
أثبت أن : $card\ N^* = card\ Z$

٢) ليكن $a, b \in Z$ وأن $b > 0$ أثبت أنه يوجد $q, r \in Z$ بحيث $a = q.b + r$ حيث $0 \leq r < b$ وأن كل من q, r يتعينان بشكل وحيد .

٣) لتكن $\mathcal{P}$ علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة P وأن $a, b \in P$ أثبت أن: $a \in \bar{b} \iff \bar{a} = \bar{b}$

٤) أذكر نص كل من : شرط الاستقراء _ تمهيدية زورن.

السؤال الثاني : لتكن $(\mathrm{G}, .)$ زمرة . والمطلوب :

١) أذكر نص مبرهنة لاغرانج ثم أثبت على صحته .

٢) لتكن H زمرة جزئية ناظمية في G أثبت أن كل زمرة جزئية من زمرة الخارج G/H هي من الشكل N/H حيث N زمرة جزئية في G تحوي H .

٣) اذا كانت الزمرة G تبديلية ومنتهية ومترتبتها تقبل القسمة على العدد الاولي p فأثبت أن الزمرة G تحوي عنصر مرتبته p .

٤) لنفرض أن H, K زمرتين دوارتين منتهيتين أثبت أن الشرط الازم والكافي كي تكون $H \oplus K$ زمرة دوارة هو أن تكون مرتبة كل من H, K أعداد أولية فيما بينها .

٥) اذا كانت الزمرة G منتهية مرتبتها تساوي 4 , أثبت أن G إما تماثل Z_4 أو تماثل الزمرة $Z_2 \oplus Z_2$.

٦) لنفرض أن $G = Z$ زمرة الاعداد الصحيحة . أثبت أنه لأجل اي عدد صحيح $k > 1$ فإن المجموعة kZ تشكل زمرة جزئية في G . وهل من اجل $k = 10$ تكون Z_{10} زمرة جزئية في G أو تماثل $10Z$. ؟

السؤال الثالث : لتكن $(U(15), .)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 15 المطلوب :

١) أوجد عناصر الزمرة $U(15)$. ثم شكل جدولا تبين فيه مقلوب ومرتبة جميع عناصر الزمرة $U(15)$.

٢) أثبت ان المجموعة $\mathrm{H} = \{1,2,4,8\}$ تشكل زمرة جزئية دوارة في الزمرة $U(15)$ وأوجد جميع مولداتها.

٣) اوجد الزمرة $U_3(15)$.

٤) أوجد جميع مرافقات الزمرة الجزئية H في الزمرة $U(15)$ ثم أوجد زمرة الخارج $\mathrm{U(15)/H}$.

٥) أوجد ثلاث زمر جزئية مختلفة في الزمرة $U(15)$ مرتبة كل منها تساوي 2 .

٦) هل الزمرة $U(15)$ هي $p-$ زمرة. ؟ ٧) أثبت أن زمرة الخارج $\mathrm{U(15)}/U_3(15)$ دوارة .

٨) أوجد زمرة جزئية في N في الزمرة $U(15)$ تحقق $\mathrm{U(15)}/U_3(15) \cong \mathrm{N} \cong Z_3$.

Syria Math

<<انتهت الأسئلة>>

السؤال الاول:

١) لنعرف العلاقة $f : Z \to N^*$ بالشكل التالي :

$$\forall n \in Z \ ; \ f(n) = \begin{cases} 2n+1 & n \geq 0 \\ 2|n| & n < 0 \end{cases}$$

إن f تطبيق لأنه إذا كان $n, m \in z$ بحيث $n = m$ عندئذ :

في حالة $n, m \geq 0 \ ; \ 2n+1 = 2m+1$

$$\Rightarrow f(n) = f(m)$$

في حالة $n, m < 0 \ ; \ 2|n| = 2|m|$

$$-n = -m$$

$$\Rightarrow f(n) = f(m)$$

ففي كلا الحالتين f تطبيق .

كما إن f متباين لأنه إذا كان $n, m \in z$ بحيث $f(n) = f(m)$ فإن :

- $n, m \geq 0 \iff 2n+1 = 2m+1 \iff n = m$
- $n, m < 0 \iff 2|n| = 2|m| \iff -n = -m \iff n = m$
- $n \geq 0 \ , m < 0 \iff 2n+1 = 2|m| = -m$

$$m = -\frac{2n+1}{2}$$

بفرض $n = 0$

$$m = -\frac{1}{2} \notin Z$$ مرفوض

ومنه الحالة الثالثة لا يمكن أن تكون موجودة ومنه f متباين .

واخيراً إن f غامر لأنه :

ليكن $n \in N^*$ عندئذ تميز حالتين :

n زوجي عندئذ : $\frac{n}{2} \in z$ و $-\frac{n}{2} \in z$

كون $-\frac{n}{2} \in z$ عنصر في المنطلق لذلك بإمكان أخذ الصورة المباشرة له .

$$f\left(\frac{-n}{2}\right) = 2\left|\frac{-n}{2}\right| = -(-n) = n$$

n فردي ومنه $n-1$ زوجي كما ان $0 \leq n-1$

عندئذ: $0 \leq \frac{n-1}{2} \in Z$

$$f\left(\frac{n-1}{2}\right) = 2\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1 = n$$

ومما سبق نجد أن التطبيق f غامر

وبالتالي فهو تقابل أي ان .

$$\Rightarrow card\ N^* = card\ Z$$

وهو المطلوب

٢) لنأخذ المجموعة : $S = \{a - k.b : k \in Z\ ,\ a - k.b \geq 0\}$

لنرى إذا كانت S خالية أم غير خالية وهنا نميز حالتين :

- $0 \in S$ وهنا واضح أن $S \neq \emptyset$

وبالتالي يوجد $k \in Z$ بحيث $a - k.b = 0$ أي أن $a = k.b$

وهنا $r = 0$ و $k = q$ ويتم المطلوب .

بقي ان نثبت ان q, r يتعينان بشكل وحيد .

إن الصفر يتعين بشكل وحيد (لا يوجد صفران غير متساويان)

وفرضاً $r = 0 \Leftarrow$ نفرض انه يوجد $q, q_1 \Leftarrow a = q.b \wedge a = q_1.b$

ومنه $q.b = q_1.b \Leftarrow q = q_1$ متساويان لان $b > 0$

- $0 \notin S$ يجب إثبات أن S غير خالية .

إذا لنبرهن أن $S \neq \emptyset$ سنميز ثلاث حالات :

١) $a > 0$ عندئذ نختار $k = 0$ فيكون : $a - b.k = a > 0$ ومنه $a - b.k > 0$ ومنه $a - b.k \in S$
ومنه S ليست خالية .

٢) $a < 0$ عندئذ نختار $k = 2a$ نجد أن :

$$a - (2a).b > 0$$

وبالتالي المجموعة $S \neq \emptyset \Rightarrow S$.

٣) $a = 0$ نختار $k = -1$ فنجد : $a - (-1)b > 0$ وبالتالي $-(-1)b \in S$ وهكذا نجد أن S غير خالية.
مما سبق نجد أن $S \neq \emptyset$ وكما أن $S \subset N$ ومنه S تحوي عنصر أصغر وليكن r حيث أن $r \in S$ حيث :

$$r = a - q.b \quad : \quad q \in Z$$

أي أن : $a = q.b + r$

الأن لنبرهن أن $r < b$:

لدينا العلاقة من أجل عددين إما: $\begin{cases} r > b \\ r = b \\ r < b \end{cases}$

الحالة الاولى : نفرض أن $r > b$ عندئذ: $r - b > 0$ و لنأخذ :

$$a - (1+q)b = \underbrace{a - qb}_{r} - b = \overbrace{r}^{\text{موجب}} - \overbrace{b}^{\text{موجب}} > 0$$

ومنه $a - (1+q)b \in S$

$$a - (1+q)b < a - q.b = r \Rightarrow a - (1+q)b < r$$

وهذا يناقض كون r عنصر أصغر في S.

الحالة الثانية : نفرض أن $r = b$ عندئذ:

$$a - (1+q).b = \underbrace{a - qb}_{r} - b$$

وبالتالي $r - b = 0$

ومنه $a - (1+q)b \in S$ وقيمته تساوي الصفر وهذا يناقض كون $0 \in S$ فتكون الحالة الثانية مرفوضة ويكون لدينا $r < b$

وبذلك يكون :

في الحالة الأولى $0 \in S$ كان $r = 0$

في الحالة الثانية $r > 0$ وبحالة $0 \notin S$ كان $0 < r < b$

وبكلتا الحالتين $0 \leq r < b$

بقي ان نبرهن الوحدانية بالنسبة للحالة الثانية

لنفرض أن : $a = q_1.b + r_1$ و $a = q.b + r$

حيث : $q, q_1, r, r_1 \in Z$ وأن $0 \leq r, r_1 < b$.

لنفرض جدلا أن $r \neq r_1$ عندئذ $q.b + r = q_1.b + r_1$

لنفرض أن $r_1 < r$ حيث $r - r_1 > 0$

$$\Rightarrow (q_1 - q)b = r - r_1 \geq b$$

وهذا غير ممكن . ومنه $r = r_1$

وبالتالي $r = r_1 \Leftarrow (q_1 - q)b = 0$ ولدينا $b \neq 0$ ومنه $(q_1 - q) = 0 \Leftarrow q_1 = q$

ويتم المطلوب.

٣) "$\Leftarrow$" بفرض أن $a \in \bar{b}$ ومنه حسب التعريف $a\mathcal{P}b$ وذلك حسب تعريف صف التكافؤ .

الآن نأخذ عنصر كيفي ينتمي لـ $\bar{a}$ نثبت أنه ينتمي لـ $\bar{b}$

وبالعكس نأخذ عنصر ينتمي لـ $\bar{b}$ و نثبت أنه ينتمي لـ $\bar{a}$

ليكن $x \in \bar{a}$ عندئذ $a\mathcal{P}x$ (حسب تعريف صف التكافؤ) إن $\mathcal{P}$ تناظرية لأنها علاقة تكافؤ ينتج أن $b\mathcal{P}a$

و $\mathcal{P}$ علاقة متعدية يصبح كما يلي

$$\begin{cases} b\mathcal{P}a \\ a\mathcal{P}x \end{cases} \Rightarrow b\mathcal{P}x \Leftrightarrow x\mathcal{P}b$$

ومنه $x \in \bar{b}$ وبالتالي $\bar{a} \subseteq \bar{b}$.

ليكن $y \in \bar{b}$ عندئذ $a\mathcal{P}y$ (حسب تعريف صف التكافؤ) إن $\mathcal{P}$ تناظرية لأنها علاقة تكافؤ ينتج أن $b\mathcal{P}y$

ولدينا $a \in \bar{b}$ ومنه $a\mathcal{P}b$.

أصبح لدينا $\begin{cases} a\mathcal{P}b \\ b\mathcal{P}y \end{cases} \Leftarrow a\mathcal{P}y$ لأن $\mathcal{P}$ علاقة متعدية وبالتالي يكون $y \in \bar{a}$ ومنه $\bar{b} \subseteq \bar{a}$

من الاحتوائيين $(\bar{a} \subseteq \bar{b}\ , \bar{b} \subseteq \bar{a})$ نجد $\bar{a} = \bar{b}$.

" $\Rightarrow$ " نفرض أن $\bar{a} = \bar{b}$ ولنبرهن أن $a \in \bar{b}$ بما أن $\bar{a} = \bar{b}$

و لدينا $a \in \bar{a}$ لأن $\mathcal{P}$ علاقة انعكاسية عندئذ:

$a \in \bar{a} = \bar{b}$ وذلك لكون $\mathcal{P}$ علاقة انعكاسية .

٤) **نص الاستقراء** :لتكن $(P, \leq)$ مجموعة جزئية مرتبة

مبدأ الاستقراء : لتكن θ قضية ما :

_a إن جميع العناصر الأصغرية في P تحقق القضية θ .

_b ولتكن $a \in P$ إذا كانت جميع العناصر $x \in P$ التي من أجلها $x < a$ المحققة القضية θ تؤدي الى ان العنصر a يحقق القضية θ .

عندئذ جميع عناصر المجموعة P تحقق القضية θ .

تمهيدية زورن : لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيا إذا كانت كل مجموعة جزئية من P غير خالية ومرتبة كليا تملك حد اعلى

(ادنى) عندئذ يوجد في P عنصر اعظمي (اصغري) واحدا على الأقل .

السؤال الثاني :

١) مبرهن ة لاغرانج :

لتكن G زمرة منتهية و H زمرة جزئية فيها عندئذ :

$$(G:1) = (G:H)(H:1)$$

الاثبات : لنفرض ان $(G:1) = n$ ولنفرض ان $a_1H, a_2H, \dots\dots\dots a_mH$: $m \leq n$

جميع المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية H في G ولما كانت المجموعة $M_l = \{a_iH : 1 \leq i \leq$ ة $\}$

تشكل تجزئة للزمرة G نجد ان $G = \cup_{i=1}^{m} a_iH$

$$(G:1) = \sum_{i=1}^{m} card\ a_iH$$

$$= card\ a_1H + card a_2H, \dots\dots\dots + card\ a_mH$$

$$= card\ H + card\ H + \dots\dots\dots + card\ H$$

$$= m\ card\ H$$

$$(G:1) = (G:H)(H:1)$$

٢) لتكن $\bar{N}$ زمرة جزئية في الزمرة G/H ولنأخذ المجموعة :

$$N = \{a : a \in G \quad , \quad aH \in \bar{N}\}$$

محايد الزمرة G

واضح أن $\emptyset \neq N \subseteq G$ لأن $e = eH = H \in \bar{N}$.

ومنه $e \in N$.

لنبرهن أن N زمرة جزئية في G

ليكن $x, y \in N$ عندئذ:

$$x.H \ , y.H \in \bar{N}$$

حيث $\bar{N}$ زمرة جزئية فإن : $(xH).(yH)^{-1} \in \bar{N}$

حسب تعريف المقلوب في زمرة الخارج نجد : $(xH).(y^{-1}H) \in \bar{N}$

حسب تعريف الجداء في زمرة الخارج نجد : $(x.y^{-1}).H \in \bar{N}$

حيث $x.y^{-1}$ يولد مرافقة تنتمي إلى $\bar{N}$.

وهذا يبين أن $(x.y^{-1}) \in N$ ومنه N زمرة جزئية في G.

ولنبرهن الآن إنها تحوي H

$$\forall\, h \in H \quad \text{فإن} \quad hH = H \in \bar{N}$$

وحسب تعريف N فإن $h \in N$ وهذا يبين أن $H \subseteq N$.

لنبرهن الان أنها من الشكل N/H أي لنبرهن أن $\bar{N} = N/H$

لدينا H زمره جزئية ناظمية في G وأن $H \subseteq N$ ومنه فإن H ناظمية في N وبالتالي فإن N/H زمرة

ليكن $\bar{x} \in \bar{N}$ عندئذ حسب تعريف $\bar{N}$ فإن $\bar{x} = x.H$

حيث $x \in G$ ولما كان $x.H \in \bar{N}$ عندئذ وحسب تعريف N فإن $x \in N$ ومنه فإن :

$$\bar{x} = x.H \in N/H$$

$$\Rightarrow \bar{N} \subseteq N/H$$

الاحتواء المعاكس :

ليكن $\bar{y} \in N/H$ عندئذ $\bar{y} = y.H$ حيث $y \in N$ ومنه حسب تعريف N فإن

$N/H \subseteq \bar{N}$ وهذا يبين أن $\bar{y} = y.H \in \bar{N}$

ومن الاحتوائين نجد :

$$\overline{N} = N/H$$

٣) لنفرض أن $(G : 1) = m.P$ حيث m عدد صحيح وحسب الاستقراء على mحيث $m \geq 1$: من أجل $m = 1$

$$(G:1) = P \quad \text{فإن}$$

عندئذ $G =< a >$ دوارة فإن : $(G:1) = o(a) = P$

لنفرض أن القضية صحيحة لأجل جميع الزمر الجزئية **و المحتواة تماماً** في G .

نميز حالتين :

١) توجد في G زمرة جزئية $K \neq G$ دليلها لا يقبل القسمة على P وحسب لاغرانج فإن :

$$m.P = (G:1) = (G:K)(K:1)$$

وبما أن $(G:K)$ لا تقبل القسمة على P ومنه $(H:1)$ تقبل القسمة على P وحسب الفرض الاستقرائي يوجد في K عنصر مرتبته P وبالتالي فإن في G عنصر مرتبته P .

٢) أدلة كل الزمر الجزئية المحتوات تماما في G تقبل القسمة على P .

لنفرض أن l هي جميع الزمر المحتواة تماما في G . ولنفرض أن H هو العنصر الأكبر في l من حيث المرتبة .

إن $H \neq G$ زمرة جزئية أعظمية (كل عنصر اكبر هو عنصر أعظمي) ولنفرض أن $(H:1) = S$

اذا كان S يقبل القسمة على P وحسب الفرض الاستقرائي فإن H تحوي عنصر مرتبته P وبالتالي G تحوي عنصر مرتبته P ويتم المطلوب .

أما اذا كان S لايقبل القسمة على P لدينا $H \subsetneq G$ عندئذ يوجد عنصر $x \in G$ بحيث $x \notin H$ ولنفرض أن

$$T =< x > \quad \text{وأن} \quad (T:1) = t$$

نلاحظ أن $H.T$ زمرة جزئية في G وأن $H \subsetneq H.T$ ومنه $G = H.T$ (لان H أعظمية ووجدنا أكبر منها ولا تساويها فهي حتما $G = H.T$ لأنه فرضنا أن $H \subsetneq G$)

أيضا لدينا حسب مبرهنة التماثل الثانية :

$$\frac{G}{H} = \frac{H.T}{H} \cong \frac{T}{H \cap T}$$

ومنه

$$\left(\frac{G}{H}:1\right) = \left(\frac{T}{H \cap T}:1\right)$$

مرتبه زمرة الخارج هو الدليل وبالتالي

$$(G:H) = (T:H \cap T)$$

حسب لاغرانج $(G:1) = (G:H)(G:1)$

$$m.p = (G:1) = (T:H \cap T)(\underbrace{H:1}_{\text{لا تقبل القسمة على } P})$$

ولما كانت مرتبة H لا تقبل القسمة على P عندئذ :

$(T:H \cap T)$ تقبل القسمة على P .

وبما فإن : $(T:1) = (T:T \cap H)(T \cap H:1)$

ولما كانت T دوارة فإن T تحوي زمرة جزئية مرتبتها P هي $< x^{\frac{t}{P}} >$ وهذه يبين أن $x^{\frac{t}{P}} \in G$

وأن مرتبتها : $O\left(x^{\frac{t}{P}}\right) = P$

٤) لنفرض أن $H =< h >: h \in H \quad , \quad K =< k >: k \in K$

ولنفرض أيضا أن $(K:1) = o(k) = m$

$(H:1) = o(h) = n$

حسب ما وجدنا سابقا أن مرتبة أي زمرة دوارة تساوي مرتبة المولد لها .

$$o(k) = m \quad , o(h) = n$$

وأيضا $((H \oplus K):1) = n.m$ و نريد اثبات أن :

$\gcd(n,m) = 1 \iff$ دوارة $H \oplus K$

◄لزوم الشرط :

لنفرض أن $H \oplus K$ دوارة

نفرض جدلا أن $\gcd(n,m)=t>1$ وبما أن t يقسم كل من m,n فإن: $h^{\frac{n}{t}}\in H$ و مرتبته t و $k^{\frac{m}{t}}\in K$ و مرتبته t أي :

$$o\left(h^{\frac{n}{t}}\right)=t \quad , \quad o\left(k^{\frac{m}{t}}\right)=t$$

ومنه حسب المبرهنة السابقة : وبما ان $\left(h^{\frac{n}{t}},e_k\right)\in H\oplus K$ و $\left(e_h,k^{\frac{m}{t}}\right)\in H\oplus K$

$$o\left(h^{\frac{n}{t}},e_k\right)=Icm\,(t,1)=t$$

$$o\left(e_h,k^{\frac{m}{t}}\right)=Icm\,(1,t)=t$$

ومنه إن كل من الزمرتين :

$$<h^{\frac{n}{t}},e_k> \quad و \quad <e_h,k^{\frac{m}{t}}> \ \epsilon\ H\oplus K$$

زمرتين جزئيتين في $H\oplus k$ وكل منها دوارة لها نفس المرتبة وهي t وهاتان الزمرتان مختلفتان .

فضلا عن ذلك :

$$<h^{\frac{n}{t}},e_k>\ \neq\ <e_h,k^{\frac{m}{t}}>$$

وهذا غير ممكن

ومنه نجد تناقض وبالتالي $\gcd(n,m)=1$.

◄كفاية الشرط :

لنفرض أن $\gcd(n,m)=1$ عندئذ :

$$(h,k)\ \epsilon\ H\oplus K$$

ومنه $(<h,k>)$ زمرة جزئية في $H\oplus K$

$o(h,k)=Icm\left(o(h).o(k)\right)=n.m$ (لأن n.m أوليان فيما بينهما)

ومنه فإن $H\oplus K=(<h,k>)$

أي أن $H\oplus K$ دوارة .

٥) لتكن G زمرة منتهية وإن $(G:1)=4$ أن G تبديلية لأن $(G:1)=2^2$

- إذا كانت G دوارة فإن $G\cong Z_4$

- لنفرض أن G ليست دوارة حسب المبرهنة السابقة فإن G تحوي زمرة جزئية مرتبتها 2 ولتكن K
إن K دوارة وبالتالي $K =< a >$: $a \in K$ ومنه $K \subsetneq G$ اي يوجد $b \in G$ بحيث $b \notin K$

ولنضع $H =< b >$ وأن H دوارة مولدة بالعنصر مرتبتها 2 أي أن $(H:1) = 2$ حيث
أن H زمرة جزئية في G فإن مرتبتها تقسم مرتبة G
ومنه $H = \{e, b\}$ $\quad$ $K = \{e, a\}$
إن كل H, K ناظمية في G حسب نص سابق ((كل زمرة منتهية مرتبتها P^2 تكون تبديلية))

ومنه $H.K$ زمرة جزئية في G .

وأن $K \cap H =< e >$ لأن إذا كان $y \in K \cap H$

ولنفرض جدلا ان $y \neq e$ وأيضا :

$$y^2 = e \ ; y \in K$$
$$y^2 = e \ ; y \in H$$

ومنه $y = y^{-1}$ ومنه فإن $o(y) = 2$: وبالتالي $y = b \in K$ وهذه تناقض ومنه

$$K \cap H =< e >$$

ونعلم أن

$$\boxed{(H.K:1) = \frac{(H:1).(K:1)}{(K \cap H:1)} \quad \text{قانون حفظ}}$$

$$(H.K:1) = (H:1).(K:1) = 4$$

$$G = K \times H \cong K \oplus H \cong Z_2 \oplus Z_2$$

ومنه اذا كانت دوارة فهي تماثل Z_4

واذا لم تكن دوارة فهي تماثل $Z_2 \oplus Z_2$

٦) kz ليست خالية $Z \subseteq kZ \neq \emptyset$ كون $0 \in kZ$.

ليكن $x, y \in kZ$ عندئذ يوجد $m_1, m_2 \in Z$ بحيث :

$$y = m_2.n \quad \text{و} \quad x = m_1.n$$

$$x - y = m_1.n - m_2.n = \underbrace{(m_1 - m_2)}_{\text{عدد صحيح}} n$$

الشرط محقق ومنه kZ زمرة جزئية في Z .

من أجل $k = 10$

- Z_{10} ليست زمرة جزئية في G لان العملية المعرفة على Z_{10} تختلف عن عملية المعرفة على G .
- كما أن Z_{10} لا تماثل $10\mathbb{Z}$ وذلك لأن :

$$\alpha : 10\mathbb{Z} \to Z_{10}$$

وبفرض أنه يوجد تماثل فالتباين محقق ومنه

نلاحظ أن :

$$\alpha(10) = \alpha(\underbrace{1+1 \dots\dots\dots+1}_{10 \text{ مرات}}) = \underbrace{\alpha(1)+\alpha(1)\dots\dots+\alpha(1)}_{10 \text{ مرات}}$$

$$= 10.\alpha(1) = 0 \Rightarrow \alpha(10) = 0$$

ومنه نستنتج أن

$$\alpha(10) = \alpha(0)$$

وبما ان α متباين فإن $10 = 0$ وهذا غير ممكن وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ أي أن $10\mathbb{Z} \neq Z_{10}$

السؤال الثالث :

١) أوجد جميع عناصر الزمرة $(U(15),.)$.

الحل :العناصر الأولية مع الاعداد الاصغر من 15 .

$$U(n) = \{x : x \in \mathbb{N} \ , 0 < x < n \ , \quad \gcd(x,n) = 1\}$$

$$U(15) = \{1,2,4,7,8,11,13,14\}$$

للحصول على مقلوب كل عنصر نأخذ العنصر الذي يكون ناتج تنفيذ العملية معه يعطي الحيادي وبما أن $(a^{-1})^{-1}$ هو a نكتفي بالتالي ((علما أن النواتج تكون باقي القسمة على 15))

$$1.1 = 1 \ , \quad 2.8 = 1 \ , \quad 4.4 = 1$$

$$7.13 = 1 \ , \quad 8.2 = 1 \ , \quad 11.11 = 1$$

$$13.7 = 1 \ , \ 14.14 = 1$$

وبالتالي يكون جدول المقاليب هو :

a	1	2	4	7	8	11	13	14
a^{-1}	1	8	4	13	2	11	7	14

الأن للحصول على مرتبة العناصر نرفع كل عنصر للاس وعندها يظهر المحايد نأخذ الأس كمرتبة للعنصر (الأس عبارة عن اصغر عدد موجب لأجلة $a^k = 1$).

$$1^1 = 1$$

$$2^1 = 2 \quad , 2^2 = 4 \ , 2^3 = 8 \, , 2^4 = 1$$

$$4^1 = 4 \ \ , 4^2 = 1$$

$$7^1 = 7 \ , 7^2 = 4 \ , 7^3 = 13 \ , 7^4 = 1$$

$$8^1 = 8 \ , 8^2 = 4 \ , 8^3 = 2 \, , 8^4 = 1 \ ,$$

$$11^1 = 11 \ , 11^2 = 1$$

$$13^1 = 13 \ , 13^2 = 4 \ \ , 13^3 = 7 \ , 13^4 = 11$$

$$14^1 = 14 \ \ , 14^2 = 1$$

وبالتالي يكون جدول مراتب العناصر هو :

a	1	2	4	7	8	11	13	14
$o(a)$	1	4	2	4	4	2	4	2

٢) نلاحظ أن المجموعة H منتهية وجزئية من $U(15)$ وإثبات أن H زمرة جزئية في $(U(15),.)$ يجب أن يتحقق الشرط :

$$\forall\, x, y \in \mathrm{K} \ ; x.y \in K$$

$\odot$	1	2	4	8
1	1	2	4	8
2	2	4	8	1
4	4	8	1	2
8	8	1	2	4

$$2^0 = 1 \ \ , \ \ 2^1 = 2 \, , 2^2 = 4, \ \ 2^3 = 8 \Longrightarrow H =< 2 >$$

$$4^0 = 1 \ , \ 4^1 = 4 \ , 4^2 = 1 \Rightarrow H \neq < 2 >$$
$$8^0 = 1 \ , \ 8^1 = 8 \ , 8^2 = 4, \ 8^3 = 2 \Rightarrow H = < 8 >$$

أي أن H مولدة بـ $2,8$.

٣) $U_k(n) = \{a : a \in U(n) : a \ mod - k = 1\}$ (تعريف الزمرة الجزئية من الشكل $U_k(n)$)

وبالتالي فإن $U_3(15)$

$$U_3(15) = \{1,4,7,13\}$$

٤) عدد المرافقات حسب لاغرانج يكون :

$$(U(15):H) = \frac{(U(15):1)}{(H:1)} = \frac{8}{4} = 2$$

لنوجد كل المرافقات اليسارية وهي من الشكل $a.H$ بحيث $a \in U(15)$

نعلم أن $a.H = H \Leftrightarrow a \in H$ ومنه فإن :

$$1.H = \{1,2,4,8\}$$
$$2.H = \{2,4,8,1\}$$
$$4.H = \{4,8,1,2\}$$
$$8.H = \{8,1,2,4\}$$

وبالتالي فإن

$$1.H = 2.H = 4.H = 8.H$$

ولنوجد المرافقات المتبقية :

$$7.H = \{7,14,13,11\} = 11.H = 13.H = 14.H$$

وبذلك يكون لدينا مرافقين مختلفين وهما : $H \ , 7.H$.

لنوجد زمرة الخارج :

بما أن $U(15)$ زمرة تبديلية و H زمرة جزئية من $U(15)$ فإن H ناظمية في $U(15)$ وبالتالي $\frac{U(15)}{H}$ معرفة وبالتالي تكون زمرة الخارج :

$$\frac{U(15)}{H} = \{a.H \ : a \in U(15)\} = \{H \ , 7.H \ \}$$

٥) لنأخذ $o(4) = o(11) = o(14) = 2$ (أوجدنا مراتب هذه العناصر بالطلب الأول)
لنأخذ الزمر المولدة بهذه العناصر اي

$$H = \{1,4\}$$
$$H_1 = \{1,11\}$$
$$H_2 = \{1,14\}$$

٦) إن $(U(15),.)$ هي $p-$ زمرة لان : $(U(15):1) = 8 = 2^3$
وهي $2-$ زمرة لأن مرتبتها قوة للعدد الأولي 2 .

٧) وجدنا أن

$$U_3(15) = \{1,4,7,13\}$$

وأن

$$(U(15):1) = (U(15):U_3(15))(U_3(15):1)$$

أي أن

$$(U(15):U_3(15)) = \frac{(U(15):1)}{(U_3(15):1)} = 2$$

وبما ان عدد عناصرها ٢ وهو اولي فتكون دوارة .

٨) إن $Z_2 =< 1 >$ دوارة وايضا وجدنا أن $(U(15):U_3(15))$ دوارة
وبما أن للزمرتين نفس المرتبة فهي متماثلة $(U(15):U_3(15)) \cong Z_2$
ولنفرض أن $N =< 4 >= \{1,4\}$
ومنه $(U(15):U_3(15)) \cong Z_2 \cong N$

Syria Math

انتهى الحل

حل أسئلة دورة الفصل الثاني عام ٢٠١٥/٢٠١٦

السؤال الأول :

١) أثبت ان كل مجموعة جزئية وغير خالية في N تحوي عنصر أصغري .
٢) أذكر نص كل مما يأتي : الشرط الأصغري – مبدأ الاستقراء – تمهيدية زورن .
٣) أثبت ان كل مجموعة مرتبة جزئيا وتحقق الشرط الأصغري تكون محققة لمبدأ الاستقراء .
٤) لتكن $\mathcal{P}$ علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة P وليكن $a,b \in P$ ولنفرض أن $\bar{a},\bar{b}$ صفي تكافؤ المولدين بالعنصر a,b على الترتيب , أثبت أنه إما $\bar{a}=\bar{b}$: أو $\bar{a}\cap\bar{b}=\emptyset$: .

السؤال الثاني : لتكن G زمرة والمطلوب :

١) اذا كان $a,b \in G$ أثبت أن $(a.b)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$.
٢) اذا كانت الزمرة G دوارة . أثبت أن اي زمرة جزئية في G تكون أيضاً دوارة .
٣) : لتكن H مجموعة جزئية منتهية في G . أثبت أن الشرط الازم والكافي كي تكون H زمرة جزئية في G هو أن يتحقق الشرط الأتي : $a.b \in H \quad ; \quad \forall\, a,b \in H$
٤) اذا كانت $(G:1)=15$ أثبت أن الزمرة G في هذه الحالة تكون دوارة .
٥) تكون H,K زمرتين جزئيتين في G . اذا كانت الزمرة الجزئية K ناظمية في G أثبت أن:

$$H.K/K \cong H/H\cap K$$

٦) لنفرض أن $G=Z$ زمرة الأعداد الصحيحة . أثبت أنه لاجل اي عددي صحيح $m>1$ فإن المجموعة mZ تشكل زمرة جزئية في G وخل من اجل $m=5$ تكون Z_5 زمرة جزئية في G او تماثل $5Z$.؟

السؤال الثالث : لتكن $(U(14),.)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 14 المطلوب :

١) أوجد عناصر الزمرة $U(14)$. ثم شكل جدولا تبين فيه مقلوب ومرتبة جميع عناصر الزمرة $U(14)$.
٢) اثبت أن الزمرة $U(14)$ دوارة. ثم أوجد جميع مولداتها.
٣) اوجد الزمرتين الجزئيتين $U_7(14)$ $U_2(14)$
٤) أثبت ان المجموعة $K=\{1,9,11\}$ تشكل زمرة جزئية دوارة في الزمرة $U(14)$.
٥) أوجد جميع مرافقات الزمرة الجزئية K في الزمرة $U(14)$ ثم أوجد زمرة الخارج $U(14)/K$.
٦) أوجد عدد جميع الزمر الجزئية التي مرتبة كل منها تساوي 2 في الزمرة $U(14)$.
٧) لتكن Z_3 زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمع بالمقاس 3 . هل الزمرة $U(14)\oplus Z_3$ دوارة ولماذا ؟ ثم أوجد مرتبة العنصر $(3,2)$ في الزمرة $U(14)\oplus Z_3$.

Syria Math

<<انتهت الأسئلة>>

السؤال الاول :

١) لتكن S مجموعة جزئية وغير خالية في N نميز الحالات التالية :

١) $S = N$ عندئذ S تحتوي عنصر أصغر او إذا كان $0 \in S$ عندئذ S تحوي عنصر أصغر .

٢) $0 \notin S$ و $S \neq N$

لنأخذ المجموعة: $L = \{a : a \in N ; a \leq x \quad \forall x \in S \}$ $(*)$

$L \neq \Phi$ لان $0 \in L$ كما ان $L \neq N$

لأنه اذا فرضنا جدلا أنه $L = N$ عندئذ يوجد $a \in S$ عندئذ $a + 1 \in L = N$ و ان $a + 1 < a$ وهذا تناقض ومنه $L \neq N$

وبالتالي يوجد عنصر $b \in L$ بحيث $b + 1 \notin L$ لآنه اذا كان لأجل $b \in N$ اذا كان $b \in L$ فإن $b + 1 \in L$

نجد ان $L = N$ وهذا غير ممكن .

ولما كان $b \in l$ فإن $\forall x \in s \; ; \; b \leq x$

ولنبرهن أن $b \in S$

لنفرض جدلاً ان $b \notin S$ عندئذ

$$\forall x \in S \; ; \; b < x$$

اي ان $x - b \in N$

$$x - b > 0$$

نفرض أن $x - b = m$

عندئذ $x = m + b$

نضيف ونطرح مقدار (١) نجد : $x = (m - 1) + (b + 1)$

وبالتالي فإن $\forall x \in s \; ; \; b + 1 \leq x$

وحسب الفرض فإن $b + 1 \in L$ وهذا يناقض كون $b + 1 \notin L$

ومنه فإن $b \in S$ ويحقق

$$\forall x \in S \; ; \; b \leq x$$

وهذا يبين ان العنصر x هو عنصر أصغر في s

كون N مجموعة مرتبة جزئياً وبما أن كل عنصر أصغر هو عنصر أصغري نجد أن كل مجموعة جزئية وغير خالية في N تحوي عنصر أصغري و وهذا هو المطلوب .

٢) **الشرط الأصغري :** كل مجموعة جزئية وغير خالية في P تحوي عنصر أصغري .

مبدأ الاستقراء : لتكن θ قضية ما

a_ إن جميع العناصر الأصغرية في P تحقق القضية θ .

b_ ولتكن $a \in P$ إذا كانت جميع العناصر $x \in P$ التي من أجلها $x < a$ المحققة القضية θ تؤدي الى ان العنصر a يحقق القضية θ .

عندئذ جميع عناصر المجموعة P تحقق القضية θ .

تمهيدية زورن :

لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيا إذا كانت كل مجموعة جزئية من P غير خالية ومرتبة كليا تملك حد اعلى (ادنى) عندئذ يوجد في P عنصر اعظمي (اصغري) واحدا على الأقل .

٣) لتكن $(P, \leq)$ مجموعة جزئية مرتبة

لنفرض M هي مجموعة العناصر P التي لا تحقق القضية θ إذا كانت :

١) $M = \phi$ يتم المطلوب.

٢) $M \neq \phi$ عندئذ وحسب الفرض فإن يوجد في M عنصر أصغري وليكن a

بالتالي a لا يحقق القضية θ .

وايضا a ليس أصغريا في P لآنه لا يحقق القضية θ .

ومنه يوجد عنصر $x \in P$ بحيث $x < a$ وان $x \neq a$.

وبالتالي فإن $x \notin M$ وهذا يبين ان العنصر x يحقق القضية θ.

وحسب الفرض b فإن العنصر a يحقق القضية θ وهذا غير ممكن وبالتالي $M = \phi$.

أي ان جميع عناصر المجموعة p تحقق القضية θ.

٤) إذا كان $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$ فإنه يتم المطلوب .

إذا كان $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ أي تحويان على الأقل عنصر مشترك

$$\exists\, d \in \bar{a} \cap \bar{b} : d \in P$$

حسب مبرهنة اذا كان عنصر من احد صفوف التكافؤ قد انتمى إلى صف تكافؤ فإن $\bar{a} = \bar{b}$ ولنحقق ذلك :

$$d \in \bar{a} \Rightarrow \bar{d} = \bar{a} \quad , \quad d \in \bar{b} \Rightarrow \bar{d} = \bar{b}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{a} = \bar{b}$$

السؤال الثاني :

١) بما أن $a, b \in G$ فإن $a.b \in G$ ومنه لكل عنصر مقلوب أي : $(a.b)^{-1} \in G$ ويحقق أي عنصر .

مع المقلوب له يعطي المحايد أي أن : $(a.b).(a.b)^{-1} = e$.

$$a(b.(a.b)^{-1}) = e$$

نضرب بـ a^{-1} من اليسار

$$b.(a.b)^{-1} = a^{-1}$$

نضرب بـ b^{-1} من اليسار

$$(a.b)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

٢) بما أن G زمرة دوارة فإنها مولدة بالعنصر a أي أن $G =< a >$ وبالتالي :

لتكن H زمرة جزئية في G نميز حالتين :

- إذا كانت $H = \{e\}$ عندئذ $H =< e >$ وبالتالي H زمرة دوارة .
- لنفرض أن $H \neq \{e\}$ عندئذ يوجد $y \in H$ وإن $y \neq e$ ولما كان $y \in G$ فإنه يوجد $t \in Z$ بحيث $y = a^t$

نأخذ المجموعة $l: \{s \ , s \in N^* : \ a^s \in H \}$

$\emptyset \neq l \subseteq N^*$ لأن $a^t \in H$ وبالتالي $t \in l$ ومنه l تحوي عنصر أصغر وليكن k ومنه $< a^k > \subseteq H$ أي أن $a^k \in H$.

لنثبت الاحتواء المعاكس

ليكن $x \in H$ ومنه $x = a^m$ حيث $m \in Z$ وحسب خوارزمية القسمة لأجل عددين k, m يوجد $q, r \in Z$ بحيث

$0 \leq r < m$ وأن $m = qk + r$

لنفرض جدلا أن $r \neq 0$ عندئذ $0 < r < m$

$$a^m = a^{qk+r} = a^{qk}.a^r = (a^k)^q.a^r$$

نضرب بمقلوب a^{qk} نجد $a^r = a^{-qk}.a^m \in H$ وبالتالي فإن $r \in l$ و $r < k$ يوجد عنصر اصغر من k وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ لأن k عنصر اصغر ومنه $r = 0$ ومنه $m = qk$ وبالتالي :

$$x = a^m = a^{qk} = (a^k)^q \in < a^k >$$

وهكذا نجد ان $H \sqsubseteq < a^k >$ وبالتالي فإن $H =< a^k >$

٣) البرهان :

١) لزوم الشرط : لنفرض أن H زمرة جزئية عندئذ حسب المبرهنة الاخيرة فإنها تحقق الشرط الثاني أي تحقق $\forall\, a,b \in H\,;\, a.b \in H \quad a,b$ ويتم المطلوب .

٢) كفاية الشرط : لنفرض أن H تحقق الشرط a,b $\forall\, a,b \in H\,;\, a.b \in H$ ولنبرهن على انه

$$\forall\, a \in H\,; \quad a^{-1} \in H$$

- ليكن $a \in H$ نميز حالتين :

١) $a = e$ عندئذ $a^{-1} = e^{-1} = e = a \in H$

٢) $a \neq e$ وحسب الشرط اذا كان $a = b \Longleftarrow a, a^2, a^3, \ldots\ldots \in H$

وبما أن H منتهية يوجد $i,j \in N$ بحيث $i \neq j$ و أن $a^i = a^j$ وكون $i \neq j$ نفرض أن $i > j$ عندئذ $i - j > 0$

أي أن $i - j \geq 1$

لدينا أيضا $a^i = a^{i-j}.a^j$

$$(a^i)(a^i)^{-1} = a^{i-j}.a^i.(a^i)^{-1} \quad (*)$$

وهذا يبين أن $e = a^{i-j}$ لأنه بحالة $i - j \neq 1$ فإنه العلاقة $(*)$ تصبح $e = a$ وهذا يخالف كوننا فرضنا أن $e \neq a$ وهذا يبين أن $i - j \neq 1$ ومنه فإن $i - j > 1$ وبالتالي $i - j - 1 > 0$

ونحن لدينا $\mathrm{i - j - 1 \in N}$; $a.\underbrace{a^{i-j-1}}_{a \text{ مقلوب}} = e$

حيث $a^{i-j-1} \in H$ ونضرب مع عنصر ينتمي إلى H فنحصل على المحايد .

وهذا يبين أن $a^{-1} = a^{i-j-1} \in H$ مما سبق نجد أن H زمرة جزئية في G.

٤) لدينا $(G:1) = 15 = 3.5$ حسب مبرهنة سيلوف الأولى فإن G تحوي عنصر مرتبته 3 وليكن a وأيضا تحوي عنصر مرتبته 5 وليكن b وأن $a \neq b$ حيث $a,b \in G$

$$o(a) = 3 \quad , \quad o(b) = 5$$

نفرض ان $H =< b >$ وأن $K =< a >$ كل منهما زمر دوارة

وأن $H \cap K =< e >$ لأنه إذا كان $y \in H \cap K$ وأن .

بفرض أن $o(y) = \alpha$ نجد ان $y^\alpha = e$

$$y \in K \;\; ; \;\; y^3 = e$$

$$y \in H \;\; ; \;\; y^5 = e$$

ومنه α يقسم 3,5 وبالتالي $\alpha = 1$ ومنه $y = e$

إن K هي زمرة $3-$ زمرة جزئية سيلوفية في G ((" كون 3^2 لا تقسم مرتبة G فإن فإن $3-$ هي سيلوفية 11 "))
وعدد هذه الزمر الجزئية تساوي $3K + 1$ وتقسم مرتبة G

$K = 0$ $\quad$ 1 مقبول

$K = 1$ $\quad$ $\begin{cases} 4 \\ 7 \end{cases}$ مرفوض كون كل واحد منهم لا يقسم مرتبة G

$K = 2$

بالتالي $K \neq 0$ فإن العدد $3K + 1$ لا يقسم مرتبة G وهذا يبين انه يوجد $3-$ زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3 واحدة فقط وبالتالي فهي ناظمية .

إن H هي $5-$ زمرة جزئية سيلوفية في G مرتبتها 5 **وعدد هذه الزمر الجزئية يساوي $5H + 1$ ويجب أن يقسم مرتبة G .**

$K = 0$ $\quad$ 1 مقبول

$K = 1$ $\quad$ $\begin{cases} 6 \\ 11 \end{cases}$ مرفوض

$K = 2$

وهذا أيضا نلاحظ أن لأجل $K \neq 0$ فإن العدد $5K + 1$ لايقسم مرتبة G وبالتالي توجد زمرة جزئية واحدة فقط من الشكل : $5-$ زمرة جزئية سيلوفية في G مرتبتها 5 واحدة فقط وبالتالي فهي ناظمية .

أصبح لدينا K, H زمرة جزئية ناظمية في G ومن فإن $K.H$ زمرة جزئية في G

$$G = H \times K$$

٥) لنعرف العلاقة : $f : H \to \frac{k.H}{k}$ بالشكل :

$$\forall\, h \in H \quad ; \quad f(h) = h.k$$

وحسب تعريفنا للجداء فإن $H \subseteq k.H$ فنجد أن f تطبيق لأنه إذا كان :

$$h_1, h_2 \in H \quad : h_1 = h_2 \implies h_1.k = h_2.k$$

$$\implies f(h_1) = f(h_2)$$

وأيضا f تشاكل :

$$f(h_1.h_2) = (h_1.h_2).k$$

وحسب تعريف الضرب في زمرة الخارج

$$= (h_1.k).(h_2.k) = f(h_1).f(h_2)$$

وهذا غامر لأن إذا كان $\bar{z} \in \frac{k.H}{k}$ حيث $\bar{z}$ مرافقة للزمرة k في kH عندئذ يوجد $g \in k.H$ بحيث $\bar{z} = g.k$

وبما أن $g \in k.H$ فإنه حسب تعريف الجداء :

$$h \in H \ , \ x \in k \quad ; \quad g = x.h$$

ومنه $\bar{z} = g.k = (x.h).k$

وحسب تعريف الضرب في زمرة الخارج :

$$\bar{z} = (x.k)(h.k)$$

$$\bar{z} = k.(h.k) = h.k$$

((وحسب التعريف وبما أن $x \in H$ و H هي المنطلق لنأخذ الصورة المباشرة لـx))

$$f(x) = x.k = \bar{z}$$

وحسب مبرهنة التماثل الأولى $\frac{H}{\ker f} \cong \frac{H.k}{k}$ لا يمكننا برهان التماثل المطلوب بنص المبرهنة مباشرتا لذلك استعنا بمبرهنة التماثل الأولى ثم سنبرهن تساوي

$$\ker f = H \cap k$$

ليكن $a \in \ker f$ عندئذ :

$$f(a) = \underbrace{k}_{\text{محايد المستقر}}$$

وحسب التعريف فإن : $f(a) = a.k$

وهنا نجد أن $a.k = k$ وبالتالي $a \in k$

وكون $\ker f$ في المنطلق فإن $a \in H$ فنجد أن $a \in H \cap k$ وبالتالي

$$\ker f \subseteq H \cap k$$

الاحتواء المعاكس :

ليكن $b \in H \cap k$ وطالما $b \in H$ فنأخذ الصورة المباشرة $b \in k$ حيث :

$$f(b) = b.k = k$$

عنصر في المنطلق مرتبط بالمحايد في المستقر ومنه :

$b \in \ker f$ أي أن $H \cap k \subseteq \ker f$

ومن الاحتوائين نجد : $H \cap k = \ker f$ و عليه يكون :

$$\frac{\mathrm{H}}{H \cap K} = \frac{H}{Ker(f)} \cong \frac{k.H}{H}$$

٦) mz ليست خالية $Z \subseteq \boldsymbol{m}Z \neq \emptyset$ كون $0 \in \boldsymbol{m}Z$.

ليكن $x, y \in \boldsymbol{m}\ Z$ عندئذ يوجد $m_1, m_2 \in \mathrm{Z}$ بحيث :

$y = m_2.n$ و $x = m_1.n$

$$x - y = m_1.n - m_2.n = \underbrace{(m_1 - m_2)}_{\text{عدد صحيح}} n$$

الشرط محقق ومنه $\boldsymbol{m}\ Z$ زمرة جزئية في Z .

من أجل $m = 5$

- Z_5ليست زمرة جزئية في G لأن العملية المعرفة على Z_5 تختلف عن عملية المعرفة على G .
- كما أن Z_5 لا تماثل $5\mathbb{Z}$ وذلك لأن :

$$\alpha : 5\mathbb{Z} \to Z_5$$

وبفرض أنه يوجد تماثل فالتباين محقق ومنه

نلاحظ أن :

$$\alpha(5) = \alpha\underbrace{(1 + 1 \dots\dots\dots + 1)}_{5\text{ مرات}} = \underbrace{\alpha(1) + \alpha(1) \dots\dots + \alpha(1)}_{5\text{ مرات}}$$

$$= 5.\alpha(1) = 0 \Longrightarrow \alpha(5) = 0$$

ومنه نستنتج أن

$$\alpha(5) = \alpha(0)$$

وبما ان α متباين فإن $5 = 0$ وهذا غير ممكن وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ أي أن $5\mathbb{Z} \neq Z_5$

السؤال الثالث :

١) أوجد جميع عناصر الزمرة $(U(14),.)$.

الحل :العناصر الأولية مع الاعداد الاصغر من 15 .

$$U(n)=\{x : x \epsilon \mathbb{N} \ ,0<x<n \ , \quad \gcd(x,n)=1\}$$

$$U(14)=\{1,3,5,9,11,13\}$$

للحصول على مقلوب كل عنصر نأخذ العنصر الذي يكون ناتج تنفيذ العملية معه يعطي الحيادي وبما أن $(a^{-1})^{-1}$ هو a نكتفي بالتالي ((علما أن النواتج تكون باقي القسمة على 15))

$$1.1=1 \ , \quad 3.5=1 \ , \quad 11.9=1$$

$$13.13=1 \ ,$$

وبالتالي يكون جدول المقاليب هو :

a	1	3	5	9	11	13
a^{-1}	1	5	3	11	9	13

الأن للحصول على مرتبة العناصر نرفع كل عنصر للاس وعندها يظهر المحايد نأخذ الأس كمرتبة للعنصر (الأس عبارة عن اصغر عدد موجب لأجلة $a^k=1$).

$$1^1=1$$

$$3^1=3 \quad ,3^2=9 \ ,3^3=13 \ ,3^4=11 \ ,3^5=5,3^6=1$$

$$5^1=5 \ ,5^2=11 \ ,5^3=13 \ ,5^4=9 \ ,5^5=3 \ ,5^6=1$$

$$9^1=9 \ ,9^2=11 \ ,9^3=1$$

$$11^1=11 \ ,11^2=9 \ ,11^3=1 \ ,$$

$$13^1=13 \ ,13^2=1$$

وبالتالي يكون جدول مراتب العناصر هو :

a	1	3	5	9	11	13
$o(a)$	1	6	6	3	3	2

٢) الزمرة U(14) دوارة لانه تمكنا من ايجاد جميعا عناصرها بالشكل التالي

$$3^1=3 \quad ,3^2=9 \ ,3^3=13 \ ,3^4=11 \ ,3^5=5,3^6=1$$

وبالتالي فهي مولدة بالعنصر ٣ أي $U(14) =< 3 >$
وايضا مولدة بالعنصر $U(14) =< 5 >$

٣) لنعرف

$$U_k(n) = \{a : a \in U(n) : a \ mod - k = 1\}$$

ومنه فإن

$$U_2(14) = \{1,3,5,9,11,13\}$$

$$U_7(14) = \{1\}$$

٤) نلاحظ أن المجموعة K منتهية وجزئية من $U(14)$ وإثبات أن H زمرة جزئية في $(U(14),.)$ يجب أن يتحقق الشرط :

$$\forall x,y \in K \ ; x.y \in K$$

$\odot$	1	9	11
1	1	9	11
9	9	11	1
11	11	1	9

وبالتالي هي زمرة جزئية وايضا دوارة لان $U(14)$ دوارة وكل زمرة جزئية من زمرة دوارة تكون ايضا دوارة

Syria Math

٥) عدد المرافقات حسب لاغرانج يكون :

$$(U(14):K) = \frac{(U(14):1)}{(K:1)} = \frac{6}{3} = 2$$

لنوجد كل المرافقات اليسارية وهي من الشكل $a.K$ بحيث $a \in U(15)$

نعلم أن $a.K = K \Leftrightarrow a \in K$ ومنه فإن :

$$1.K = \{1,9,11\} = 9.K = \{9,11,1\} = 11.K = \{11,1,9\}$$

ولنوجد المرافقات المتبقية :

$$3.K = \{3,13,5\} = 5.K = 13.K$$

وبذلك يكون لدينا مرافقين مختلفين وهما : K ,$3.K$.

لنوجد زمرة الخارج :

بما أن $U(14)$ زمرة تبديلية و K زمرة جزئية من $U(14)$ فإن K ناظمية في $U(14)$ وبالتالي $\frac{U(14)}{K}$ معرفة وبالتالي تكون زمرة الخارج :

$$\frac{U(14)}{K} = \{a.K \ : a \in U(14)\} = \{K ,3.K \}$$

٦) لا يوجد سوى زمرة وحيدة وهي $o(13) = 2$

$$< 13 >= \{1,13\}$$

٧)

$$U(14) \oplus Z_3 = \{(1,0), (3,0), (5,0), (9,0), (11,0), (13,0),$$

$$(1,1), (3,1), (5,1), (9,1), (11,1), (13,1)$$

$$(1,2), (3,2), (5,2), (9,2), (11,2), (13,2)\}$$

$$(U(14): 1) = 6$$

$$(Z_3: 1) = 3$$

وأن $\gcd(6,3) = 3$ وبالتالي $U(14) \oplus Z_3$ ليست زمرة دوارة

$$o(a,b) = Icm\big(o(a), o(b)\big)$$

$$o(3,2) = Icm\big(o(3), o(2)\big)$$

$$o(3,2) = Icm(6,3) = 6$$

انتهى الحل

حل أسئلة دورة التكميلي عام ٢٠١٥/٢٠١٦

السؤال الأول :

١) لتكن Σ تجزئة للمجموعة P فإن العلاقة $\mathcal{P}$ المعرفة بالشكل الاتي :

$$\forall a,b \in P : \ a\mathcal{P}b \ \Leftrightarrow \ \exists\, A \in \Sigma\,;\ a,b \in A$$

هي علاقة تكافؤ على المجموعة P وإن صفوف تكافؤ العلاقة $\mathcal{P}$ هي وفقط هي عناصر التجزئة Σ أي أن :

$$\Sigma = {}^{P}/_{\mathcal{P}}$$

٢) أذكر نص تمهيدية زورن

٣) ليكن $a,b \in Z$ بحيث $b > 0$ عندئذ يوجد $q,r \in Z$ بحيث $a = q.b + r$ حيث $0 \le r < b$ فضلاً عن ذلك q,r يتعينان بشكل وحيد .

٤) لتكن $(\le)$ علاقة ترتيب جزئية معرفة على المجموعة A . عرف كلاً من العنصر الأصغر والأصغري ثم أثبت أن كل عنصر أصغر هو عنصر أصغري , فضلاً عن ذلك أورد مثالاً على أن العكس غير صحيح.

السؤال الثاني :

لتكن G زمرة . والمطلوب :

١) أثبت أن المجموعة $Z(G) = \{a : a \in G\ ,\ \ x.a = a.x\ \ ,\ \ \forall\, x \in G\}$ تشكل زمرة جزئية في G .

٢) أثبت أن كل زمرة جزئية ناظمية في الزمرة G هي نواة لتشاكل زمري غامر .

٣) لنفرض أن الزمرة G تبديلية منتهية وليكن P عدداً اوليا يقسم مرتبة الزمرة G. أثبت أن الزمرة G تحوي عنصراً مرتبته P .

٤) لتكن A,B جزئية في G إذا كانت الزمرة الجزئية B ناظمية في G أثبت أن الجداء $A.B$ زمرة جزئية في G.

٥) اذا كانت الزمرة $\boldsymbol{G}$ منتهية ومرتبتها عدد اولي , أثبت أن الزمرة $\boldsymbol{G}$ في هذه الحالة تكون دوارة .

السؤال الثالث :

لتكن $U(15)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 15 المطلوب :

١) أوجد جميع عناصر الزمرة $U(15)$. ثم شكل جدولا تبين فيه مقلوب ومرتبة جميع عناصر الزمرة $U(15)$.

٢) اوجد الزمرتين الجزئيتين $U_5(15)$ و $U_3(15)$ ثم بين اي منهما دوارة

٣) أثبت ان المجموعة $\mathrm{H} = \{1,2,4,8\}$ تشكل زمرة جزئية دوارة في الزمرة $U(15)$

٤) أوجد جميع المرافقات الزمرة الجزئية H في الزمرة $U(15)$ ثم أوجد زمرة الخارج $\mathrm{U(15)/H}$.

٥) أوجد جميع الزمرة الجزئية التي مرتبة كل منها تساوي 2 في الزمرة $U(15)$.

٦) لتكن Z_3 زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمع بالمقاس 3 . هل الزمرة $U(15) \oplus Z_3$ دوارة ولماذا ؟ ثم اوجد مرتبة العنصر $(2,2)$ في الزمرة $U(15) \oplus Z_3$.

Syria Math

<<انتهت الاسئلة>>

السؤال الأول :

١) لنبرهن أن $\mathcal{P}$ هي علاقة تكافؤ فإن :

١) $\mathcal{P}$ انعكاسية لأن : بما ان Σ تجزئة للمجموعة P فهذا وحسب الشرط الثالث من شروط التجزئة

$$P = \cup_{A\,\epsilon\Sigma}\ A$$

لنأخذ عنصر كيفي من $a \epsilon P$ فيكون $a \epsilon \cup_{A\,\epsilon\Sigma}\ A$ وبذلك

$$\exists\, A \epsilon \Sigma\ ;\ a \epsilon A \implies a\mathcal{P}a$$

٢) $\mathcal{P}$ تناظرية لأن :

لنأخذ عنصرين كيفيين

$$a, b \epsilon P :\ a\mathcal{P}b \Leftrightarrow \exists\, B \epsilon \Sigma\ ;\ a, b \epsilon B\ ,\ b, a \epsilon B \implies b\mathcal{P}a$$

٣) $\mathcal{P}$ متعدية لأن : لنأخذ ثلاث عناصر كيفية :

$$\forall a, b, c\ \epsilon P$$

$$a\mathcal{P}b\ \ \exists\ A \epsilon \Sigma\ ;\ a, b \epsilon A$$

$$b\mathcal{P}c\ \ \exists\ B \epsilon \Sigma\ ;\ b, c \epsilon B$$

$$\implies \mathrm{b} \epsilon A \cap B \implies A \cap B\ \neq \emptyset$$

وكون Σ تجزئة للمجموعة P فإن :

$$A = B$$

ومنه $a\mathcal{P}c \Leftarrow a\ , c\ \epsilon A$ ومنه $\mathcal{P}$ متعدية .

Syria Math

لنثبت الان ان

$$\Sigma = {}^{P}/_{\mathcal{P}}$$

ليكن

$$\bar{a} \epsilon {}^{P}/_{\mathcal{P}}\ ;\ a \epsilon P = \bigcup_{A\,\epsilon\Sigma} A$$

ومنه يوجد $B \epsilon \Sigma$ بحيث $a \epsilon B$ ولنبرهن على ان $\bar{a} = B$

ليكن $x \epsilon \bar{a}$ عندئذ $a\mathcal{P}x$ حسب تعريف علاقة التكافؤ

فإنه يوجد $D \epsilon \Sigma$ بحيث $a, x \epsilon D$

أصبح لدينا $B, D \epsilon \Sigma$ و $a \epsilon B, D$ وبالتالي $a \epsilon B \cap D$

وحسب الشرط الثاني وبما أن Σ تجزئة للمجموعة P فينتج أن $B = D$ أي أن :

$x \epsilon D$ وبالتالي $\bar{a} \subseteq B$

ليكن $y \epsilon B$ عندئذ $a, y \epsilon B$ وحسب تعريف $\mathcal{P}$ فإن :

$y \mathcal{P} a$ ومنه $y \epsilon \bar{a}$ وبالتالي $B \subseteq \bar{a}$

بذلك اثبتنا ان $\bar{a} = B$

وجدنا انه اخذنا $a \epsilon P$; $\bar{a} \epsilon {}^{P}/_{\mathcal{P}}$ كيفي وجدنا انه $\bar{a} = B \in \Sigma$ مما يعني انه

$${}^{P}/_{\mathcal{P}} \subseteq \Sigma$$

لنثبت الاحتواء المعاكس

لنأخذ عنصر كيفي وليكن $G \epsilon \Sigma$ وبما ان Σ تجزئة للمجموعة P فحسب الشرط الاول من شروط التجزئة نجد ان $G \neq \phi$ وهذا يعني على الاقل انه يوجد عنصر وليكن $g \epsilon G$

ولنبرهن أن $\bar{g} = G$

ليكن $x \epsilon G$ وبما ان $g \epsilon G$ فإن $g \mathcal{P} x$ وبالتالي $x \epsilon \bar{g}$ ومنه $G \subseteq \bar{g}$

ليكن $y \epsilon \bar{g}$ عندئذ $g \mathcal{P} y$ ومنه يوجد $D \epsilon \Sigma$ بحيث $g, y \epsilon D$

ومنه $g \epsilon G \cap D$ وبذلك يكون $G = D$ أي $y \epsilon G = D$ ومنه $\bar{g} \subseteq G$

ومن الاحتوائيين :

$\bar{g} \subseteq G$ و $G \subseteq \bar{g}$ يكون $\bar{g} = G \epsilon \Sigma$ ومنه $\Sigma \subseteq {}^{P}/_{\mathcal{P}}$

ومن الاحتوائيين :

${}^{P}/_{\mathcal{P}} \subseteq \Sigma$ و $\Sigma \subseteq {}^{P}/_{\mathcal{P}}$ يكون $\Sigma = {}^{P}/_{\mathcal{P}}$

٢) **تمهيدية زورن :** لتكن $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئيا إذا كانت كل مجموعة جزئية من P غير خالية ومرتبة كليا تملك حد اعلى

(ادنى) عندئذ يوجد في P عنصر اعظمي (اصغري) واحدا على الأقل .

٣) لنأخذ المجموعة : $S=\{a-k.b : k\in Z \ , \ a-k.b \geq 0\}$

لنرى إذا كانت S خالية أم غير خالية وهنا نميز حالتين :

- $S\neq\emptyset$ وهنا واضح أن $0\in S$

وبالتالي يوجد $k\in Z$ بحيث $0=a-k.b$ أي أن $a=k.b$

وهنا $r=0$ و $k=q$ ويتم المطلوب .

بقي ان نثبت ان q,r يتعينان بشكل وحيد .

إن الصفر يتعين بشكل وحيد (لا يوجد صفران غير متساويان)

وفرضاً $r=0 \Longleftarrow$ نفرض انه يوجد $q,q_1 \Longleftarrow a=q.b \ \wedge a=q_1.b$

ومنه $b>0$ متساويان لأن $q=q_1 \Longleftarrow q.b=q_1.b$

- $0\notin S$ يجب إثبات أن S غير خالية .

إذا لنبرهن أن $S\neq\emptyset$ سنميز ثلاث حالات :

١) $a>0$ عندئذ نختار $k=0$ فيكون : $a-b.k=a>0$ ومنه $a-b.k>0$ ومنه $a-b.k\in S$ ومنه S ليست خالية .

٢) $a<0$ عندئذ نختار $k=2a$ نجد أن :

$$a-(2a).b>0$$

وبالتالي المجموعة $S\neq\emptyset \Longrightarrow a+2a.b\in S$.

٣) $a=0$ نختار $k=-1$ فنجد : $a-(-1)b>0$ وبالتالي $-(-1)b\in S$ وهكذا نجد أن S غير خالية.

مما سبق نجد أن $S\neq\emptyset$ وكما أن $S\subset N$ ومنه S تحوي عنصر أصغر وليكن r حيث أن $r\in S$ حيث :

$$r=a-q.b \quad : \quad q\in Z$$

أي أن : $a=q.b+r$

الأن لنبرهن أن $r<b$:

لدينا العلاقة من أجل عددين إما: $\begin{cases} r > b \\ r = b \\ r < b \end{cases}$

الحالة الاولى : نفرض أن $r > b$ عندئذ: $r - b > 0$ و لنأخذ :

$$a - (1+q)b = \underbrace{a - qb}_{r} - b = \overbrace{r}^{\text{موجب}} - \overbrace{b}^{\text{موجب}} > 0$$

ومنه $a - (1+q)b \in S$

$$a - (1+q)b < a - q.b = r \Rightarrow a - (1+q)b < r$$

وهذا يناقض كون r عنصر أصغر في S.

الحالة الثانية : نفرض أن $r = b$ عندئذ:

$$a - (1+q).b = \underbrace{a - qb}_{r} - b$$

وبالتالي $r - b = 0$

ومنه $a - (1+q)b \in S$ وقيمته تساوي الصفر وهذا يناقض كون $0 \in S$ فتكون الحالة الثانية مرفوضة ويكون لدينا $r < b$

وبذلك يكون :

في الحالة الأولى $0 \in S$ كان $r = 0$

في الحالة الثانية $r > 0$ وبحالة $0 \notin S$ كان $0 < r < b$

وبكلتا الحالتين $0 \leq r < b$

بقي ان نبرهن الوحدانية بالنسبة للحالة الثانية

لنفرض أن : $a = q_1.b + r_1$ و $a = q.b + r$

حيث : $q, q_1, r, r_1 \in Z$ وأن $0 \leq r, r_1 < b$.

لنفرض جدلا أن $r \neq r_1$ عندئذ $q.b + r = q_1.b + r_1$

لنفرض أن $r < r_1$ حيث $r - r_1 > 0$

$$\Rightarrow (q_1 - q)b = r - r_1 \geq b$$

وهذا غير ممكن . ومنه $r = r_1$

وبالتالي $r = r_1 \Rightarrow (q_1 - q)b = 0$ ولدينا $b \neq 0$ ومنه $(q_1 - q) = 0 \Rightarrow q_1 = q$

ويتم المطلوب.

٤) ليكن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً:

١) نقول عن العنصر $a \in A$ إنه عنصر **أصغر** في المجموعة A إذا حقق :

$$\forall x \in A ; a \leq x$$

٢) نقول عن العنصر $b \in A$ إنه عنصر **أصغري** في المجموعة A إذا حقق :

$$\forall y \in A ; y \leq b \Rightarrow y = b$$

كل عنصر أصغر يكون عنصر أصغري

البرهان : ليكن $a \in A$ عنصر أصغر في A :

هذا يعني انه وحسب التعريف

$$\forall x \in A \quad ; a \leq x \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

ولنفرض أن b عنصر اصغري في P :

وهذا يعني انه وحسب التعريف

$$\forall y \in A ; y \leq b \Rightarrow y = b \ldots\ldots\ldots (**)$$

ولكن $(*)$ محققة من أجل جميع قيم x من A وبفرض أن $x = b$ وبالاستفادة من $(**)$ نجد ان $a = b$

ومنه العنصر الاصغر يكون عنصر أصغري .

مثال معاكس :

لتكن المجموعة $A = \{a, b, c, d\}$ ولنأخذ f حيث :

$$f = \{\{a\}, \{a, b\}, \{c, b\}, \{a, b, c\}\}$$

نلاحظ ان f مجموعة مرتبة جزئيا بالنسبة لعلاقة الاحتواء وفيها $\{a\}$ عنصر أصغري بينما هو ليس عنصر أصغر لأن $\{a\} \not\subset \{c, b\}$

السؤال الثاني :

١) $\emptyset \neq Z(G) \subseteq G$ لأن $e \in G$ وأن $\forall x \in G : e.x = x.e$

وليكن $a, b \in Z(G)$ عندئذ :

$$\forall x \in G : a.x = x.a \quad , b.x = x.b$$

نضرب بالمقلوب من اليسار $\Rightarrow$ $x.b^{-1} = b^{-1}.x$

نضرب بمقلوب b من اليمين $\Rightarrow$ $b.x.b^{-1} = x$

$$x(a.b^{-1}) = (xa)b^{-1} = (ax)b^{-1} = a(xb^{-1}) = a(b^{-1}.x) = (ab^{-1})x$$

$$a.b^{-1} \in Z(G)$$

وهذا يبين أن $Z(G)$ زمرة جزئية في G .

٢) لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G عندئذ G/H معرفة وهي زمرة الخارج ولنعرف العلاقة f .

$$f : G \to \frac{G}{H}$$

$$\forall a \in G : f(a) = aH$$

فنجد أن العلاقة f تطبيق لأنه إذا كان $a = b \Rightarrow aH = bH$: $\forall a, b \in G$

كما أن f تشاكل لأنه حسب التعريف : $f(a.b) = (a.b)H = (aH).(bH) = f(a).f(b)$

إن f غامر لأنه لأجل $d.H \in G/H$ عندئذ $d \in G$ ومنه $f(d) = d.H$

اثبتنا انه تشاكل زمري غامر بقي ان نثبت أن H نواة أي لنبرهن أن $H = \ker f$:

ليكن $x \in \ker f$ عندئذ $x \in G$ حيث $f(x) = x.H = H$ (المحايد)

لأن $x \in \ker f$ $x.H = H$ ومنه $x \in H$ أي أن :

$$\ker(f) \subseteq H$$

الاحتواء المعاكس :

ليكن $y \in H$ وطالما H زمرة جزئية في G فإن $y \in G$ أي أن y ينتمي للمنطلق فنأخذ الصورة المباشرة له .

$$f(y) = \underbrace{y}_{y \in H} .H = \underbrace{H}_{\text{محايد المستقر}}$$

وهذا يبين أن $y \in \ker f$ ومنه $H \subseteq \ker f$

ومن الاحتوائين نجد :

$$\ker(f) = H$$

٣) لنفرض أن $(G:1) = m.P$ حيث m عدد صحيح وحسب الاستقراء على m حيث $m \geq 1$: من أجل $m = 1$

$$(G:1) = P \quad \text{فإن}$$

عندئذ $G =< a >$ دوارة فإن : $(G:1) = o(a) = P$

لنفرض أن القضية صحيحة لأجل جميع الزمر الجزئية **و المحتواة تماماً** في G .

نميز حالتين :

١) توجد في G زمرة جزئية $K \neq G$ دليلها لا يقبل القسمة على P وحسب لاغرانج فإن :

$$m.P = (G:1) = (G:K)(K:1)$$

وبما أن $(G:K)$ لا تقبل القسمة على P ومنه $(H:1)$ تقبل القسمة على P وحسب الفرض الاستقرائي يوجد في K عنصر مرتبته P وبالتالي فإن في G عنصر مرتبته P .

٢) أدلة كل الزمر الجزئية المحتواة تماما في G تقبل القسمة على P .

لنفرض أن l هي جميع الزمر المحتواة تماما في G . ولنفرض أن H هو العنصر الأكبر في l من حيث المرتبة .

إن $H \neq G$ زمرة جزئية أعظمية (كل عنصر اكبر هو عنصر أعظمي) ولنفرض أن $(H:1) = S$

اذا كان S يقبل القسمة على P وحسب الفرض الاستقرائي فإن H تحوي عنصر مرتبته P وبالتالي G تحوي عنصر مرتبته P ويتم المطلوب .

أما اذا كان S لايقبل القسمة على P لدينا $H \subsetneq G$ عندئذ يوجد عنصر $x \epsilon G$ بحيث $x \notin H$ ولنفرض أن

$$T =< x > \quad \text{وأن} \quad (T:1) = t$$

نلاحظ أن $H.T$ زمرة جزئية في G وأن $H \subsetneq H.T$ ومنه $G = H.T$ (لان H أعظمية ووجدنا أكبر منها ولا تساويها فهي حتما $G = H.T$ لأنه فرضنا أن $H \subsetneq G$)

أيضا لدينا حسب مبرهنة التماثل الثانية :

$$\frac{G}{H} = \frac{H.T}{H} \cong \frac{T}{H \cap T}$$

ومنه

$$\left(\frac{G}{H}:1\right) = \left(\frac{T}{H \cap T}:1\right)$$

مرتبه زمرة الخارج هو الدليل وبالتالي

$$(G:H) = (T:H \cap T)$$

حسب لاغرانج $(G:1) = (G:H)(G:1)$

$$m.p = (G:1) = (T:H \cap T)(\underbrace{H:1}_{\text{لا تقبل القسمة على } P})$$

ولما كانت مرتبة H لا تقبل القسمة على P عندئذ :

$(T:H \cap T)$ تقبل القسمة على P .

وبما فإن : $(T:1) = (T:T \cap H)(T \cap H:1)$

ولما كانت T دوارة فإن T تحوي زمرة جزئية مرتبتها P هي $< x^{\frac{t}{P}} >$ وهذه يبين أن

$$x^{\frac{t}{P}} \in G$$

وأن مرتبتها : $O\left(x^{\frac{t}{P}}\right) = P$

٤) واضح أن $\emptyset \neq A.B \subseteq G$ وليكن $x, y \in A.B$ عندئذ وحسب تعريف جداء المجموعات فإن :

$$x = a.b \quad ; \quad a, a_1 \in A$$
$$y = a_1.b_1 \quad ; \quad b, b_1 \in A$$

ومنه $x.y^{-1} = a.b(a_1.b_1)^{-1} = a.b.{b_1}^{-1}.{a_1}^{-1}$

$$= a.b.\underbrace{{a_1}^{-1}.a_1}_{\text{المحايد}}.{b_1}^{-1}.{a_1}^{-1}$$

بما أن الزمرة الجزئية B ناظمية في G فإن $a_1.{b_1}^{-1}.{a_1}^{-1} \in a_1.B.{a_1}^{-1} \subseteq B$

لنفرض أن $a_1.{b_1}^{-1}.{a_1}^{-1} = b_0 \in B$ ولنعوض

$$x.y^{-1} = a.b.{a_1}^{-1}.b_0 = a.\underbrace{{a_1}^{-1}.a_1}_{\text{المحايد}}.b.{a_1}^{-1}.b_0$$

بما أن الزمرة الجزئية B ناظمية في G فإن $a_1.b.{a_1}^{-1} \in a_1.B.{a_1}^{-1} \subseteq B$

لنفرض أن $a_1.b.{a_1}^{-1} = b' \in B$ ولنعوض

$$x.y^{-1} = \underbrace{a.{a_1}^{-1}}_{\in A}.\underbrace{b'.b_0}_{\in B} \in A.B$$

ومنه $A.B$ زمرة زمرة جزئية في G .

٥) لنفرض أن G زمرة منتهية وأن $(G:1) = P$ حيث P عدد أولي عندئذ يوجد $a \in G$ وإن $a \neq e$ ولنأخذ الزمرة الجزئية $< a >$ في G مرتبتها لا تساوي 1 وحسب لاغرانج فإن مرتبة الزمرة $< a >$ تقسم p ومنه فإن $(< a >:1) = P$ وبالتالي $G =< a >$ وهذا يبين أن G دوارة .

السؤال الثالث :

١) أوجد جميع عناصر الزمرة $(U(15),.)$.

الحل :العناصر الأولية مع الاعداد الاصغر من 15 .

$$U(n) = \{x : x \in \mathbb{N} \ , 0 < x < n \ , \quad \gcd(x,n) = 1\}$$

$$U(15) = \{1,2,4,7,8,11,13,14\}$$

للحصول على مقلوب كل عنصر نأخذ العنصر الذي يكون ناتج تنفيذ العملية معه يعطي الحيادي وبما أن $(a^{-1})^{-1}$ هو a نكتفي بالتالي ((علما أن النواتج تكون باقي القسمة على 15))

$$1.1 = 1 \ , \quad 2.8 = 1 \ , \quad 4.4 = 1$$

$$7.13 = 1 \ , \quad 8.2 = 1 \ , \quad 11.11 = 1$$

$$13.7 = 1 \ , \quad 14.14 = 1$$

وبالتالي يكون جدول المقاليب هو :

a	1	2	4	7	8	11	13	14
a^{-1}	1	8	4	13	2	11	7	14

الأن للحصول على مرتبة العناصر نرفع كل عنصر للاس وعندها يظهر المحايد نأخذ الأس كمرتبة للعنصر

(الأس عبارة عن اصغر عدد موجب لأجلة $a^k = 1$).

$$1^1 = 1$$

$$2^1 = 2 \quad , 2^2 = 4 \ , 2^3 = 8 \ , 2^4 = 1$$

$$4^1 = 4 \ , 4^2 = 1$$

$$7^1 = 7 \ , 7^2 = 4 \ , 7^3 = 13 \ , 7^4 = 1$$

$$8^1 = 8 \ , 8^2 = 4 \ , 8^3 = 2 \ , 8^4 = 1 \ ,$$

$$11^1 = 11 \ , 11^2 = 1$$

$$13^1 = 13\ , 13^2 = 4\ \ , 13^3 = 7\ , 13^4 = 1$$

$$14^1 = 14\ \ , 14^2 = 1$$

وبالتالي يكون جدول مراتب العناصر هو :

a	1	2	4	7	8	11	13	14
$o(a)$	1	4	2	4	4	2	4	2

٢) لنعرف المجموعة

$$U_k(n) = \{a : a \in U(n) : a \bmod -k = 1\}$$

ومنه فإن

$$U_3(15) = \{1,4,7,13\}$$

$$U_5(15) = \{1,11\}$$

وجدنا في الطلب الاول أن

$$4^1 = 4\ \ , 4^2 = 1$$

$$7^1 = 7\ , 7^2 = 4\ , 7^3 = 13\ , 7^4 = 1$$

$$11^1 = 11\ , 11^2 = 1$$

$$13^1 = 13\ , 13^2 = 4\ \ , 13^3 = 7\ , 13^4 = 1$$

وبالتالي فإن $U_3(15)$ و $U_5(15)$ مولدتان

$$U_3(15) =< 7 >=< 13 >$$
$$U_5(15) =< 11 >$$

٣) نلاحظ أن المجموعة H منتهية وجزئية من $U(15)$ وإثبات أن H زمرة جزئية في $(U(15),.)$ يجب أن يتحقق الشرط :

$$\forall\, x, y \in K\ ; x.y \in K$$

$\odot$	1	2	4	8

1	1	2	4	8
2	2	4	8	1
4	4	8	1	2
8	8	1	2	4

$$2^0 = 1 \ , \ 2^1 = 2 \, , 2^2 = 4, \ 2^3 = 8 \Rightarrow H =< 2 >$$

$$4^0 = 1 \ , \ 4^1 = 4 \, , 4^2 = 1 \Rightarrow H \neq< 2 >$$

$$8^0 = 1 \ , \ 8^1 = 8 \, , 8^2 = 4, \ 8^3 = 2 \Rightarrow H =< 8 >$$

أي أن H مولدة بـ $2,8$.

٤) عدد المرافقات حسب لاغرانج يكون :

$$(U(15):H) = \frac{(U(15):1)}{(H:1)} = \frac{8}{4} = 2$$

لنوجد كل المرافقات اليسارية وهي من الشكل $a.H$ بحيث $a \epsilon U(15)$

نعلم أن $a.H = H \Leftrightarrow a \epsilon H$ ومنه فإن :

$$1.H = \{1,2,4,8\}$$

$$2.H = \{2,4,8,1\}$$

$$4.H = \{4,8,1,2\}$$

$$8.H = \{8,1,2,4\}$$

وبالتالي فإن

$$1.H = 2.H = 4.H = 8.H$$

ولنوجد المرافقات المتبقية :

$$7.H = \{7,14,13,11\} = 11.H = 13.H = 14.H$$

وبذلك يكون لدينا مرافقين مختلفين وهما : $H \ , 7.H$.

لنوجد زمرة الخارج :

بما أن $U(15)$ زمرة تبديلية و H زمرة جزئية من $U(15)$ فإن H ناظمية في $U(15)$ وبالتالي $\frac{U(15)}{H}$ معرفة وبالتالي تكون زمرة الخارج :

$$\frac{U(15)}{H} = \{a.H \ : a \in U(15)\} = \{H\ ,7.H\ \}$$

٥) نرى أن $o(4) = o(11) = o(14) = 2$ (أوجدنا مراتب هذه العناصر بالطلب الأول)
لنأخذ الزمر المولدة بهذه العناصر اي

$$H = \{1,4\}$$
$$H_1 = \{1,11\}$$
$$H_2 = \{1,14\}$$

٦) إن

$$U(15) \oplus Z_3 = \{(1,0), (2,0), (4,0), (7,0), (8,0), (11,0), (13,0), (14,0),$$
$$(1,1), (2,1), (4,1), (7,1), (8,1), (11,1), (13,1), (14,1)$$
$$(1,2), (2,2), (4,2), (7,2), (8,2), (11,2), (13,2), (14,2)\}$$

$$(U(15):1) = 8$$

$$(Z_3:1) = 3$$

وأن $\gcd(8,3) = 1$ وبالتالي $U(14) \oplus Z_3$ زمرة دوارة

$$o(a,b) = Icm\big(o(a), o(b)\big)$$

$$o(2,2) = Icm\big(o(2), o(2)\big)$$

$$o(2,2) = Icm(4,3) = 12$$

Syria Math

انتهى الحل