التحليل 3

الدكتور: يحيى قطيش

المحاضرة : الثامنة عشر

التاريخ : ٢٠١٦/١٢/١٣

إعداد : نذير تيناوي

سنكمل في هذه المحاضرة حل تمارين عن التكاملات التابعة لوسيط :

تمرين (١):

$$I(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-x}\frac{\sin\beta x}{x}dx$$

سنطبق قاعدة لايبتنز :

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = \int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(e^{-x}\frac{\sin\beta x}{x}\right)dx = \int_0^{\infty} e^{-x}\cos\beta x\, dx$$

و من أجل التكامل الناتج نطبق طريقة التجزئة إذ نفرض :

$$u = \cos\beta x \Rightarrow du = -\beta\sin\beta x\, dx$$
$$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

و عليه يكون :

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = \underbrace{[-e^{-x}\cos\beta x]_0^{\infty}}_{=1} - \beta\int_0^{\infty} e^{-x}\sin\beta x\, dx$$

و مرة أخرى :

$$u = \sin\beta x \Rightarrow du = \beta\cos\beta x dx$$
$$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

و يكون :

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = 1 - \beta\left(\underbrace{[-e^{-x}\sin\beta x]_0^{\infty}}_{=0} + \beta\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-x}\cos\beta x dx}_{\frac{dI(\beta)}{\beta}}\right) = 1 - \beta^2\frac{dI(\beta)}{\beta}$$

$$(1+\beta^2)\frac{dI(\beta)}{d\beta} = 1 \Rightarrow \frac{dI(\beta)}{d\beta} = \frac{1}{1+\beta^2}$$

لقد حصلنا على معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات إذ نكتب :

من التكامل الأصلي

من الناتج الأخير

$$dI(\beta) = \frac{d\beta}{1+\beta^2} \Longrightarrow I(\beta) = \arctan(\beta) + c$$

و لنحسب الثابت c :

$$0 = I(0) = \arctan(0) + c \Longrightarrow c = 0$$

$$\boxed{\Longrightarrow I(\beta) = \int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin\beta x}{x}dx = \arctan(\beta)}$$

و يمكن أن نستنتج أن:

$$I(1) = \int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{4}$$

تمرين(٢) : احسب التكامل:

$$I = \int_0^\infty x^{a-1}(\ln x)^n e^{-x}dx \quad n \in N, a > 0$$

الحل: لنأخذ التكامل الغماوي التابع للوسيط **a** :

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx$$

و هو تكامل تابع للوسيط a ، نطبق قاعدة لايبنتز:

$$\frac{d\Gamma(a)}{da} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a}(e^{-x}x^{a-1})dx$$

لكن نعلم أن $\frac{d(x^b)}{db} = x^b \ln x$ و إليك إثبات ذلك :لنضع :

$$\boxed{y = x^b \Longrightarrow \ln y = b\ln x \Longrightarrow \frac{y'_b}{y} = \ln x \Longrightarrow y'_b = y\ln x \Longrightarrow y'_b = x^b \ln x}$$

إذاً:

$$\Gamma'(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} \ln x \, dx$$

نشتق مرة أخرى بنفس الطريقة:

$$\Gamma''(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} (\ln x)^2 \, dx$$

و هكذا نكمل حتى نصل إلى :

$$\Gamma^{(n)}(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} (\ln x)^n dx \Rightarrow \boxed{I = \Gamma^{(n)}(a)}$$

تمرين (٣) :

$$I(\alpha) = \int_0^1 (\ln x)^n x^\alpha dx \quad : n \in N \ , \alpha > -1$$

الحل: لدينا :

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{1+\alpha}$$

نشتق الطرفين بالنسبة لـ α و ذلك حسب قاعدة لايبنتز :

$$\int_0^1 x^\alpha (\ln x) dx = -\frac{1}{(1+\alpha)^2}$$

نشتق مرة أخرى :

$$\int_0^1 x^\alpha (\ln x)^2 dx = \frac{1.2}{(1+\alpha)^3}$$

و أيضاً مرة ثالثة :

$$\int_0^1 x^\alpha (lnx)^3 dx = -\frac{1.2.3}{(1+\alpha)^4}$$

حتى إذا وصلنا إلى المشتق من المرتبة **n** نجد :

$$\boxed{\int_0^1 x^\alpha (lnx)^n dx = (-1)^{\mathrm{n}} \frac{1.2.3\ldots n}{(1+\alpha)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{(1+\alpha)^{n+1}}}$$

و هو المطلوب.

تمرين (٤) :

ليكن لدينا :

$$I(\alpha) = \frac{1}{w}\int_0^\alpha \underbrace{f(x)\sin\big(w(\alpha - x)\big)}_{\varphi(x,\alpha)} dx$$

أثبت أن :

$$\mathrm{I''(\alpha) + w^2 I(\alpha) = f(\alpha)}$$

الحل: نلاحظ أن الحد الأعلى للتكامل تابع للوسيط α و بالتال سنطبق هنا تعميم قاعدة لايبتنز

$$I'(\alpha) = \frac{1}{w}\left(\int_0^\alpha \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x)\sin\big(w(\alpha-x)\big)dx + \varphi(\alpha)\frac{d\alpha}{d\alpha} - \varphi(0)\underbrace{\frac{d0}{d\alpha}}_{=0}\right)$$

$$= \frac{1}{w}\left(w\int_0^\alpha f(x)\cos\big(w(\alpha-x)\big)dx + \underbrace{f(\alpha)\sin\left(w\left(\underbrace{\alpha-\alpha}_{0}\right)\right)}_{0} + 0\right)$$

$$\Rightarrow I'(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)\cos\big(w(\alpha-x)\big)dx$$

نشتق مرة أخرى وفق قاعدة تعميم لايبتنز :

$$I''(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x)\cos\big(w(\alpha-x)\big)\,dx+f(\alpha)\underbrace{\cos\big(w(\alpha-\alpha)\big)}_{cos0=1}\underbrace{\frac{d\alpha}{d\alpha}}_{=1}$$
$$-f(0)\cos\big(w(\alpha-0)\big)\underbrace{\frac{d0}{d\alpha}}_{=0}$$

$$I''(\alpha)=\underbrace{-w\int_0^{\alpha}f(x)\sin\big(w(\alpha-x)\big)\,dx}_{w^2I(\alpha)}+f(\alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{I''(\alpha)+w^2I(\alpha)=f(\alpha)}$$

تمرين(٥):

انطلاقاً من المساواة :

$$\int_0^{\infty}e^{-ax^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{a}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)\ ,\quad a>0$$

احسب التكامل :

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{a}x^2}\,\mathrm{x}^{2n}\mathrm{dx}$$

$$\left(e^{g(a)}\right)'_a=g'(a)e^{g(a)}$$

الحل:

نشتق طرفي العلاقة (١) بالنسبة للوسيط a:

$$\int_0^{\infty}e^{-ax^2}(-x^2)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)'_a=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)a^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{\infty}e^{-ax^2}x^2\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{2}\,a^{-\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{a\sqrt{a}}$$

نشتق مرة أخرى :

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}(-x^2)x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)a^{-\frac{5}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty e^{-ax^2}x^{2.2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{a^2\sqrt{a}}$$

نشتق مرة أخرى فنجد :

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}x^{2.3}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\frac{1}{a^3\sqrt{a}}$$

و نكمل فنجد :

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-ax^2}x^{2.n}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}\frac{(2n-1)!!}{a^n\sqrt{a}}}$$

تمرين(٥) : انطلاقاً من المساواة :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a+x^2} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{a}} \ldots\ldots(1) \quad ,a>0$$

احسب :

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{dx}}{(\mathrm{a}+\mathrm{x}^2)^{\mathrm{n}+1}}$$

الحل:

نشتق طرفي العلاقة (١) بالنسبة للوسيط **a** :

$$\int_0^\infty \frac{-1}{(a+x^2)^2}dx = -\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{a\sqrt{a}}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty \frac{1}{(a+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{a\sqrt{a}}$$

نشتق مرة أخرى :

$$\int_0^\infty \frac{-1.2}{(a+x^2)^3}dx = -\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{a^2\sqrt{a}}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty \frac{1.2}{(a+x^2)^3}dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{a^2\sqrt{a}}$$

و نكمل حتى نشتق **n** مرة فنجد أن :

$$\int_0^\infty \frac{n!}{(a+x^2)^{n+1}}dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2^n}\frac{1}{a^n\sqrt{a}}$$

نقسم الطرفين على $n!$:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2^n n!}\frac{1}{a^n\sqrt{a}}$$

لكن :

$$2^n.n! = \underbrace{2.2.2\ldots.2}_{\text{مرة } n}\ 1.2.3.4\ldots n = (1.2)(2.2)(3.2)\ldots(n.2) = 2.4.6\ldots 2n$$
$$= (2n)!!$$

إذاً يكون :

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{(2n)!!}\frac{1}{a^n\sqrt{a}} = \frac{\pi}{2(2n)!!\,a^n\sqrt{a}}}$$

تمرين (٦) :

احسب:

$$I(\alpha)=\int_0^\infty e^{-kx}\frac{1-\cos\alpha x}{x}dx \quad \alpha,k>0$$

الحل:

نطبق قاعدة لايبنتز :

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\alpha}e^{-kx}\frac{1-\cos\alpha x}{x}dx=\int_0^\infty e^{-kx}\frac{x\sin\alpha x}{x}dx=\int_0^\infty e^{-kx}\sin\alpha x\,dx$$

<<الاشتقاق كان بالنسبة لـ α و ليس **x** أما الآن فسنكامل بالنسبة لـ **x** و ذلك بالتجزئة إذ نفرض :

$$u=e^{-kx}\Rightarrow du=-ke^{-kx}dx$$

$$dv=\sin\alpha x\,dx\Rightarrow v=-\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x$$

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\left[-\frac{e^{-kx}}{\alpha}\cos\alpha x\right]_0^\infty-\frac{k}{\alpha}\int_0^\infty e^{-kx}\cos\alpha x\,dx=\frac{1}{\alpha}-\frac{k}{\alpha}\int_0^\infty e^{-kx}\cos\alpha x\,dx$$

نطبق التجزئة مرة أخرى :

$$u=e^{-kx}\Rightarrow du=-ke^{-kx}dx$$

$$dv=\cos\alpha x\,dx\Rightarrow v=\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x$$

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\frac{1}{\alpha}-\frac{k}{\alpha}\left(\underbrace{\left[\frac{e^{-kx}}{\alpha}\sin\alpha x\right]_0^\infty}_{=0}+\frac{k}{\alpha}\underbrace{\int_0^\infty e^{-kx}\sin\alpha x\,dx}_{\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}}\right)$$

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\frac{1}{\alpha}-\frac{k^2}{\alpha^2}\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}\Rightarrow\left(1+\frac{k^2}{\alpha^2}\right)\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha^2+k^2}{\alpha^2}\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\frac{1}{\alpha}\Rightarrow\Rightarrow\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\frac{\alpha}{\alpha^2+k^2}$$

حصلنا على معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات كما يلي :

$$dI(\alpha) = \frac{\alpha d\alpha}{\alpha^2+k^2}$$

من الناتج

$$\Rightarrow I(\alpha) = \int \frac{\alpha d\alpha}{\alpha^2+k^2} = \frac{1}{2}\ln(\alpha^2+k^2) + c$$

لحساب الثابت c :

من التكامل الأصلي

$$0 = I(0) = \frac{1}{2}\ln(k^2) + c \Rightarrow c = \frac{1}{2}\ln(k^2)$$

نعوض :

$$\boxed{I(\alpha) = \frac{1}{2}\ln(\alpha^2+k^2) - \frac{1}{2}\ln(k^2) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{\alpha}{k}\right)^2\right)}$$

"انتهت المحاضرة"

Syria Math

نذير تيناوي