Syria Math

مبادئ الإحصاء والاحتمالات

الدكتور: احمد يونسو

المحاضرة : العشرون " الأخيرة"

إعداد : زهرة + شهيناز

المحاضرة الثامنة

الأشعة ((المتجهات)) العشوائية الثنائية :

مثال

ندعو الثنائي (X, Y) بالشعاع أو المتجهة العشوائية إذا كانت كل من مركباته X, Y متغيراً عشوائياً. قيمة المتجهة (X, Y) نرمز لها بأحرف لاتينية صغيرة من الشكل (x, y)، وبالتالي كل قيمة في الشعاع العشوائي (X, Y) هي نقطة في المستوي.

$$\mathbb{R}\cdot\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

دالة التوزيع:

تعريف: دالة التوزيع الاحتمالي للشعاع ((المتجهة)) العشوائي (X, Y) تعطى بـ

$$F(x, y) = P[X < x , Y < y]$$

$$= P(X < x) \cap (Y < y)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

- تسمى أيضاً "دالة التوزيع المشتركة" لـ X, Y وهي تحقق الخواص التالية:

1) وهي دالة غير متناقصة بالنسبة لـ x (إذا اثبتنا y) وغير متناقصة بالنسبة لـ y (إذا اثبتنا x) يعني إذا اثبتنا y وكان $y = y_0$ فإن:

$$\forall x_1 \leq x_2 ; F(x_1, y_0) \leq F(x_2, y_0)$$

وإذا أخذنا $x = x$ فإن:

$$\forall y_1 \leq y_2 ; F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$$

خواص:

1- $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$

2- $F(+\infty, -\infty) = 1$

3- $P(x_1 \leq X < x_2 ; y_1 \leq Y < y_2)$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

$$F(+\infty, y) = F_Y(y) \quad , \quad F(x, +\infty) = F_X(x)$$

تسمى دالة التوزيع الهامشي لـ X, Y

اثبات الخواص السابقة

1) واضح حسب التعريف $F(x, y)$ فإن:

$$F(x, y) = P[X < x ; Y < y]$$

ومنه

$$F(-\infty, y) = P[X < -\infty ; Y < y]$$

لأن الحدث $[X < -\infty ; Y < y]$ يعني وقوع الحدثين $[Y < y]$، $[X < -\infty]$ والحدث $[X < -\infty]$ هو الحدث المستحيل، وبالطريقة نفسها نجد $F(x, -\infty) = 0$

2)

$$F(+\infty, +\infty) = 1$$

$$\Longrightarrow P[X < +\infty , Y < +\infty] = 1$$

لأن الحدث $[X + \infty , Y < +\infty]$ يعني وقوع الحدثين $[X < +\infty]$، $[Y < +\infty]$ وهذا محقق دوماً

3) $P[x_1 \leq X < x_2 ; y_1 \leq Y < y_2]$

$$= P[X < x_2 ; y_1 \leq Y < y_2] - P[X < x_1 ; y_1 \leq Y < y_2]$$

نطبق احتمال $\Longrightarrow$
$$= P[X < x_2 , Y < y_2] - P[X < x_2 , Y < y_1] - P[X < x_1 , Y < y_2] + P[X < x_1 , Y < y_1]$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

4)

$$\forall x \in \mathbb{R} ; F_X(x) = F(x, +\infty)$$

لأن $(X < x) \cap (X < +\infty) = (X < x)$

$$\Longrightarrow F(x, +\infty) = P(X < x) = F_X(x)$$

وكذلك

$$(Y < y) \cap (Y < +\infty) = (Y < y)$$

$$\Longrightarrow F(+\infty, y) = F_Y(y)$$

Syria Math

الأشعة العشوائية الثنائية المتقطعة :

نقول عن المتجهة العشوائية (X, Y) أنه متقطع إذا كانت مجموعة القيم التي يأخذها مجموعة منتهية أو غير منتهية قابلة للعد

ملاحظة

إذا كانت X, Y متغيراً متقطعاً فإن (X, Y) متجهة عشوائية متقطعة.

دالة الاحتمال المشتركة :

ليكن (X, Y) متجهة عشوائياً متقطعاً حيث

$$R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_m, \dots\}$$
$$R_Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$$

عندئذ يكون مجموعة قيم (X, Y) هي :

$$\left\{(x_i, y_j) ; \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array}\right\}$$

- نقول أن الحدث (x_i, y_j) (x, y) قد وقع إذا وقع الحدثان $(X = x_i)$ $(Y = y_j)$ معاً في آن واحد

- نرمز للاحتمال وقوع الحدث

$$[(X, Y) = (x_i, y_j) = f(x_i, y_j)]$$

إي أن :

$$f(x_i, y_j) = P[X < x_i ; Y < y_j]$$

$$\forall \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots m \\ j = 1, 2, \dots n \end{array}$$

- إن $f(x, y)$ تحقق الشرطان :

1) $0 \leq f(x_i, y_j)$

2) $\sum_{i=1} \sum_{j=1} f(x_i, y_j) = 1$

يمكن إنشاء جدول التوزيع المشترك للشعاع (X, Y) في الكتاب ص 107

مثال

* ليكن X, Y متغيرات عشوائياً متقطعين فأن جدول التوزيع المتقطع يعطى بالشكل .

$X \backslash Y$	2	3	4	مجموع
1	0.1	0.2	0.1	0.4
2	0.2	0.1	0.3	0.6
مجموع	0.3	0.3	0.4	1

احسب احتمال .

$$P(1 \leq X , Y = 4)$$
$$P(X = 1, Y = 4) + P(X = 2, Y = 4)$$
$$f(1, 4) + f(2, 4) = 0.1 + 0.5$$
$$= 0.4$$

$$P(X = 2, Y \leq 3)$$
$$P(X = 2, Y = 2) + P(X = 2, Y = 3)$$
$$f(2, 2) + f(2, 3) = 0.2 + 0.1$$
$$= 0.3$$

$$P(1 \leq X < 2 , 2 < Y \leq 4)$$
$$P(X = 1, X = 3) + P(X = 1, Y = 4)$$

2) أوجد جدولي التوزيع الهامشي لـ X, Y

- جدول التوزيع الهامشي لـ X

x	1	2	مجموع
$f_X(x)$	0.4	0.6	1

- جدول التوزيع الهامشي لـ Y

y	2	3	4	مجموع
$f_Y(y)$	0.3	0.3	0.4	1

أوجد دالة التوزيع الهامشي لكل من X, Y

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 1 \\ 0.4 & : 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & : x > 2 \end{cases}$$

والأسى الدالة ايضاً

سؤال اضافي

هل X, Y مستقلان أم لا..

- نقول عن X و Y المتقطعان أنهما مستقلان اذا كان

$$f(x_i, y_j) = f_X(x_i) \cdot f_Y(y_j)$$

$$\forall \begin{cases} i = 1, 2 \ldots \\ j = 1, 2 \ldots \end{cases}$$

- بالنسبة للثال السابق

$$f(1,2) = 0.1 \neq f_X(1) \cdot f_Y(2) = (0.4)(0.3) = (0.12)$$

$\Longleftarrow$ X, Y غير مستقلان

دالة التوزيع المؤجد العشوائي متقطع:

$$F(x,y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} f(x_i, y_j)$$

بالنسبة للثال السابق

$x \backslash y$	2	3	4
1	0,1	0,2	0,1
2	0,2	0,1	0.3

$$F(2,3) = \sum_{x_i < 2} \sum_{y_j < 3} f(x_i, y_j)$$

$$= f(1,2) = 0,1$$

$$F(1.5, 3.5) = \sum_{x_i < 2.5} \sum_{y_j < 3.5} f(x_i, y_j)$$

$$= f(1,2) + f(1,3)$$

$$\Longrightarrow \quad = 0.1 + 0.2 = 0.3$$

الأشعة العشوائية الثنائية المستمرة:

نقول عن الشعاع العشوائي (X, Y) أنه مستمر اذا وجدت دالة $f(x,y)$ غير سالبة بحيث

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, du\, dv$$

- نسمي الدالة $f(x,y)$ دالة الكثافة للشعاع العشوائي (X, Y) أو دالة الكثافة المشتركة لـ (X, Y)

قاعدة:

يكون $f(x,y)$ كثافة لمتجه عشوائي (X, Y) اذا تحقق الشرطان:

1- $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

2- $$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy = 1$$

نذكر.. أن خواص دالة التوزيع المشتركة أن

$$F(+\infty, +\infty) = 1 \Longrightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy = 1$$

ملاحظة:

كون $F(x,y)$ دالة أصلية لـ $f(x,y)$ فإنه:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

أي أنه دالة الكثافة المشتركة هي مشتق $F(x,y)$ بالنسبة لـ x, y

دوال الكثافة الهامشية لـ X, Y

ليكن X, Y متغيرين عشوائيين مستمرين دالة كثافتهما المشتركة $f(x,y)$ عندئذ يكون:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

- دالة الكثافة الهامشية لـ X

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

- دالة الكثافة الهامشية لـ Y

وتكون دالة التوزيع الهامشية لـ X

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

ولـ Y

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt$$

مثال 15 ص 112

لتكن لدينا الدالة

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & ; 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 & ; \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب:

1) أثبت أن $f(x,y)$ دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي مثل (X, Y)

2) أوجد الكثافة الهامشية لكل من X, Y

3) احسب قيمة الاحتمال $P[0<x<\frac{1}{2}\,;\,Y>0]$

الحل...

1 واضح أن $0 \leq f(x,y)$ من تعريف الدالة

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\Big|_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y\right) dy = \frac{y}{2} + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

2 الكثافة الهامشية لـ X:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 (x+y)\,dy$$

$$= \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

ومنه

$$f_X(x) = \begin{cases} x+\frac{1}{2} & ; 0<x<1 \\ 0 & ; \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

حساب الكثافة الهامشية لـ Y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 (x+y)\,dx$$

$$= y + \frac{1}{2}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} y+\frac{1}{2} & ; 0<y<1 \\ 0 & ; \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

3 $P[0<x<\frac{1}{2}\,,\,Y>0]$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{1} (x+y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 (x+y)\,dy\right] dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x+\frac{1}{2}\right) dx = \frac{3}{8}$$

حساب التوقع الرياضي :

إذا كان X متغيراً عشوائي منفصل بمجموعة قيمه

$$R_x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

- ودالة احتماله :

$$f_x(x_i)$$

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f_x(x)$	$\dots$			

$$E(x) = \sum_{i=1} x_i \cdot f(x_i)$$

- التباين :

$$V(x) = E(x)^2 - [E(x)]^2$$
$$= E[x - E(x)]^2$$

x	1	2
$f(x)$	0.4	2

$$E(x) = (1)\,0.4 + 2(0.6) = 0.16$$

X مستمراً كثافته $f_x(x)$ ثابت

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\, dx$$

انتهت المحاضرة ...

بتوفيق