بنى جبرية ٣

المحاضرة ٥

فريق الرياضيات الاول

بنى جبرية (3)

المحاضرة الخامسة

مبرهنة

ليكن f تشاكل مودولي وليكن M_1 مودول جزئي من M و N_1 مودول جزئي من N عندئذ:

[I] $\overleftarrow{f}\left(\overrightarrow{f}(M_1)\right) = M_1 + \ker f$

$$\overrightarrow{f}\left(\overleftarrow{f}(N_1)\right) = N_1 \cap \mathrm{Im} f$$

الإثبات

[I] $\overleftarrow{f}\left(\overrightarrow{f}(M_1)\right) = \left\{ x : x \in M \,;\, f(x) \in \overrightarrow{f}(M_1) \right\}$

$$\forall y \in \overleftarrow{f}\left(\overrightarrow{f}(M_1)\right) \Rightarrow f(y) \in \overrightarrow{f}(M_1)$$

$$\Rightarrow \exists\, m_1 \in M_1 \,;\, f(y) = f(m_1)$$

$$\Rightarrow f(y) - f(m_1) = 0_N$$

وكون f تشاكل مودولي فإن:

$$f(y - m_1) = 0_N \Rightarrow y - m_1 \in \ker f.$$

$$\exists\, t \in \ker f \,;\, y - m_1 = t \Rightarrow y = \underbrace{\underbrace{m_1}_{\in M_1} + \underbrace{t}_{\in \ker f}}_{\in M_1 + \ker f}$$

$$\Rightarrow \overleftarrow{f}\left(\overrightarrow{f}(M_1)\right) \subseteq M_1 + \ker f$$

الاحتواء أول

2

الموضوع :   التاريخ : / /

$\forall x \in M_1 + \ker f$

$\exists m_1 \in M_1 , \quad \beta \in \ker f ; \quad x = m_1 + \beta$

$f(x) = f(m_1 + \beta) = f(m_1) + \underbrace{f(\beta)}_{=0}$

$= f(m_1) \in \overrightarrow{f}(M)$

$\Rightarrow x \in \overleftarrow{f}(\overrightarrow{f}(M_1))$

$\Rightarrow M_1 + \ker f \subseteq \overleftarrow{f}(\overrightarrow{f}(M_1))$

احتواء ثاني

ومن الاحتوائين نجد

$M_1 + \ker f = \overleftarrow{f}(\overrightarrow{f}(M_1))$

$\boxed{2}$

لنثبت أن :

$\overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(N_1)) = N_1 \cap \operatorname{Im} f$

$\overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(N_1)) = \{ f(x) : f(x) \in N ; x \in \overleftarrow{f}(N_1) \}$

$\forall x \in \overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(N_1)) \Rightarrow \exists z \in \overleftarrow{f}(N_1)$

$x = f(z)$

$\overleftarrow{f}(N_1) = \{ x : x \in M ; f(x) \in N_1 \}$

$z \in \overleftarrow{f}(N_1) \Rightarrow f(z) \in N_1$

$x = f(z) \in N_1 \Rightarrow x \in \operatorname{Im} f \cap N_1$

$\Rightarrow \overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(N_1)) \subseteq N_1 \cap \operatorname{Im} f$

احتواء أول

ليكن: $x \in N_1 \cap Imf$ ، عندئذٍ

$x \in N_1$ و $x \in Imf$

$\Rightarrow \exists y \in M \ ; \ x = f(y)$

وأيضاً.

$x = f(y) \in N_1$

$y \in \overleftarrow{f}(N_1)$

$x = f(y) \in \overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(N_1))$

$\Rightarrow N_1 \cap Imf \subseteq \overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(N_1))$

احتواء ثاني

من الاحتوائين نجد: $\boxed{N_1 \cap Imf = \overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(N_1))}$

تمرين

ليكن: $f : M \to N$ و $g : N \to P$

f و g تشاكلان موديوليان، عندئذٍ:

1. $g \circ f$ تشاكل موديولي
2. f و g غامران $\Leftarrow$ $g \circ f$ غامر
3. g ، f تباين $\Leftarrow$ $g \circ f$ متباين
4. $g \circ f$ غامر $\Leftarrow$ g غامر
5. $g \circ f$ متباين $\Leftarrow$ f متباين.

أمثلة

1) لتكن: $(G_1 , *_1)$ و $(G_2 , *_2)$ زمرتان تبديليتان ، $f : G_1 \to G_2$.

عندئذ : f تشاكل مودولي على Z

2) ليكن M مودول على A ، حيث A حلقة تبديلية ، ولنأخذ $a \in A$ ولنعرف العلاقة :

$$f_a : M \longrightarrow M$$
$$m \longrightarrow am$$

عندئذ : f_a تشاكل مودولي .

3) ليكن M مودول على A ، وليكن $n \in \mathbb{N}^*$:

1) $$M^n = \{ (m_1 , \dots , m_n) ; m_i \in M_i ; \forall i \in \{1 \dots n\} \}$$

نزودها بقانون تشكيل داخلي :

$\boxed{\cdot}$ $(m_1 + \dots + m_n) + (m'_1 + \dots + m'_n) = (m_1 + m'_1 , \dots , m_n + m'_n) \in M^n$

$\boxed{\cdot\cdot}$ $\forall \lambda \in A : \lambda (m_1 , \dots , m_n) = (\lambda m_1 , \dots , \lambda m_n) \in M^n$

إن $(M^n , + , \cdot)$ تشكل مودول على A

2) واضحاً :

$$Pr_1 : M^n \longrightarrow M$$
$$(m_1 , \dots , m_n) \longrightarrow m_1$$

نجد أن Pr_1 تشاكل مودولي وغامر

كذلك :

$$Pr_i : M^n \longrightarrow M$$
$$(m_1 , \dots , m_n) \longrightarrow m_i$$

أن Pr_i تشاكل مودولي.

و Pr_i غامر لأن:

$\forall m \in M \; ; \exists (0, 0 \ldots, m_i, 0 \ldots 0_n) \in M^n$

تحقق:

$F(0, 0, \ldots m_i, 0 \ldots, 0) = m$

حيث $m = m_i$ يدعى Pr_i تابع الاسقاط على المركبة.

* مودول القسمة *

تعريف ليكن M مودول على A ولنأخذ N مودول جزئي من M، عندها نعرف مجموعة:

$M \backslash N = \{ m + N \; ; \; m \in M \}$

* $0 + N \in M \backslash N \neq \phi$
* $(m_1 + N) + (m_2 + N) = (m_1 + m_2) + N$
* $\lambda (m_1 + N) = (\lambda m_1) + N$

إن $M \backslash N$ مودول على A.

مبرهنة ليكن M مودول على A، N مودول جزئي منه، ولتكن:

L: مجموعة المودولات الجزئية من M وتحوي N

L_0: مجموعة المودولات الجزئية من $M \backslash N$

$F : L \longrightarrow L_0$

$P \in L : F(P) = P \backslash N$

الموضوع : التاريخ : / /

أثبت أن f تقابل :

الإثبات : واضح أن N مودول جزئي من P لأن
$N \subseteq P$

* f تطبيق لأن : ليكن : $P_1, P_2 \in L$

حيث : $P_1 = P_2$

$$\Rightarrow P_1 / N = P_2 / N \Rightarrow f(P_1) = f(P_2)$$

* تباينا لأن : ليكن : $P_1, P_2 \in L$

$$f(P_1) = f(P_2)$$
$$\Rightarrow P_1 / N = P_2 / N$$

لنثبت أن : $P_1 = P_2$

$$\alpha_1 \in P_1 \Rightarrow \alpha_1 + N \in P_1 / N = P_2 / N$$
$$\Rightarrow \alpha_1 + N \in P_2 / N$$
$$\Rightarrow \exists\, \alpha_2 \in P_2 \; ; \; \alpha_1 - \alpha_2 \in N$$
$$\Rightarrow \exists\, n \in N \; ; \; n = \alpha_1 - \alpha_2$$
$$\alpha_1 = \underbrace{n}_{\in N \subseteq P_2} + \underbrace{\alpha_2}_{\in P_2} \in P_2$$

$\Rightarrow P_1 \subseteq P_2$ الاحتواء أول

وبنفس الطريقة نجد أن $P_2 \subseteq P_1$ الاحتواء ثاني

ومن الاحتوائين نجد أن : $P_1 = P_2$

* غامر لأن : ليكن : $Q \in L_0$ ولنعرف مجموعة :

$$U = \{ x \in M \, ; \, x + N \in Q \}$$

$$0 + N \in Q \Rightarrow 0 \in U \neq \phi$$

واضحاً : $U \subseteq M$

لنثبت أن : ① $U \in L$

② $f(U) = Q$

$$\forall x, y \in U, \forall \alpha, \beta \in A$$

$$(\alpha x + \beta y) + N = \underbrace{\underbrace{(\alpha x + N)}_{\in Q} + \underbrace{(\beta y + N)}_{\in Q}}_{\in Q}$$

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in U$$

وبالتالي U موديول جزئي من M

* لنثبت أن $N \subseteq U$:

$$\forall x \in N : \Rightarrow x + N = N \in Q \Rightarrow x \in U$$

وبالتالي نجد أن : $U \in L$

$$f(u) = u \backslash N \in L_0$$

لأن $N \subseteq U$

لنثبت أن $U \backslash N = Q$

$$U \backslash N = \{ x + N \, ; \, x \in U \}$$

$$D \in U \backslash N \Rightarrow D = x + N \, ; \, x \in U$$

بما أن $x \in U$ فإن :

$$\Rightarrow D = x + N \in Q$$

$$\Rightarrow U \setminus N \subseteq Q$$

الاحتواء الأول

ليكن $\bar{p} \in Q$ ونكون : $Q \in I_0$ فإن

Q مودول جزئي من $M \setminus N$

تتكون عناصر Q من الشكل $x+N \,;\, x \in M$

$$\bar{p} = x+N \,;\, x \in M$$

$$\bar{p} = x+N \in Q \Rightarrow x \in U$$

$$\Rightarrow \bar{p} = x+N \in U / N$$

$$\Rightarrow Q \subseteq U \setminus N$$

الاحتواء الثاني

من الاحتوائين نجد أن $Q = U \setminus N$

إنتهت المحاضرة