أسئلة دورات الهندسة التحليلية

Syria Math Team

مجموعة السنة الأولى : طلاب
كلية العلوم قسم الرياضيات
٢٠١٧

مجموعة السنة الثانية :
Improve our Mathematics

صفحتنا على فيس بوك : IOM

الرابط
/facebook.com/MathemagicTeam

السؤال الأول :

١) أوجد معادلتي المستقيم القاطع للمستقيمين :

$$D_1\begin{cases}Q_1(x,y,z)=x+y+z-3=0\\ Q_2(x,y,z)=y-z+2=0\end{cases}$$

$$D_2\begin{cases}Q_3(x,y,z)=2x+y-2z+2=0\\ Q_4(x,y,z)=3x+2z+1=0\end{cases}$$

والموازي للمتجه $\vec{v}=(2,5,3)$

السؤال الثاني :

أوجد معادلتي المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم للمنحني المعين بالمعادلات الوسيطية :

$$x=2t^2+4sin2t\ ,y=2cos2t\ ,z=2t^2+3t+1$$

عند النقطة M_0 الموافقة لـ $t=0$

السؤال الثالث :

١) أثبت أن المستوي Q يقطع الكرة S ثم عين احداثيات مركز دائرة التقاطع ونصف قطرها حيث :

$$Q(x,y,z)=3x+y-z-9=0$$

$$S(x,y,z) = (x-4)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 36$$

٢) بين وضع المستقيم المعين بالمعادلات $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{4}$ بالنسبة لـ Q

٣) أوجد معادلة مستوي يمر بالفصل المشترك للمستويين P_1, P_2 و يعامد المستوي Q

$$P_1(x,y,z) = 2x + y - z + 5 = 0$$
$$P_2(x,y,z) = x + 3y - 2z + 1 = 0$$

السؤال الرابع :

لدينا السطح S المعين بالمعادلة :

$$f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 2Z^2 + 6x + 4y - 9 = 0$$

المطلوب :

١) عين مركز تناظر السطح S .

٢) عين نوع المجسم الممثل بالمعادلة السابقة

٣) أوجد معادلة المخروط الموجه للسطح S .

٤) أوجد مقطع السطح S مع المستوي xoy .

--- انتهت الأسئلة ---

حل الدورة التكميلية ٢٠١٥

السؤال الأول :

١) أوجد معادلتي المستقيم القاطع للمستقيمين :

$$D_1\begin{cases}Q_1(x,y,z)=x+y+z-3=0\\ Q_2(x,y,z)=y-z+2=0\end{cases}$$

$$D_2\begin{cases}Q_3(x,y,z)=2x+y-2z+2=0\\ Q_4(x,y,z)=3x+2z+1=0\end{cases}$$

والموازي للمتجه $\vec{v}=(2,5,3)$

الحــل :

لإيجاد معادلتي المستقيم المطلوب نتبع الخطوات التالية :

- أولا نوجد معادلة حزمة المستويات المارة بالمستقيم D_1 ثم نختار مستوي بحيث يكون موازي للمتجه $\vec{v}$:

$$Q(\lambda)=Q_1(x,y,z)+\lambda.Q_2(x,y,z)$$

$$Q(\lambda)=x+(1+\lambda)y+(1-\lambda)z+(-3+2\lambda)=0 \quad (*)$$

ومنه ناظم الحزمة يكون :

$$\overrightarrow{N_\lambda}(1\,,1+\lambda\,,1-\lambda)$$

نوجد قيمة الوسيط λ باتباع ما يلي :

نختار مستوي بحيث يكون موازي للمتجه $\vec{v}$ بأن نبحث عن قيمة لـλ بحيث :

$$\overrightarrow{N_\lambda}\perp\vec{v}$$

ومنه: $\overrightarrow{N_\lambda}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow (1\,,1+\lambda\,,1-\lambda)(2,5,3) = 0$

وبالتالي : $\overrightarrow{N_\lambda}.\vec{v} = (1)2 + (1+\lambda)(5) + (1-\lambda)3 = 0$

$$\Rightarrow 2 + 5 + 5\lambda + 3 - 3\lambda = 0$$

$$\Rightarrow 2\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda = -5$$

نعوض قيمة λ بمعادلة الحزمة $(*)$ نحصل على معادلة المستوي التالي :

$$Q'(x,y,z) = x - 4y + 6z - 13 = 0$$

➢ ثانيا نوجد معادلة حزمة المستويات المارة بالمستقيم D_2 ثم نختار مستوي بحيث يكون موازي للمتجه $\vec{v}$:

$$Q(m) = Q_3(x,y,z) + m.Q_4(x,y,z)$$

$$Q(m) = (2+3m)x + y + (-2+2m)z + (2+m) = 0 \quad (**)$$

ومنه ناظم الحزمة يكون :

$$\overrightarrow{N_m}(2+3m, 1, -2+2m)$$

نوجد قيمة الوسيط m باتباع ما يلي :

نختار مستوي بحيث يكون موازي للمتجه $\vec{v}$ بأن نبحث عن قيمة لـm بحيث :

$$\overrightarrow{N_m} \perp \vec{v}$$

ومنه :

$$\overrightarrow{N_m}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow (2+3m, 1, -2+2m)(2,5,3) = 0$$

وبالتالي :

$$\overrightarrow{N_m}.\vec{v} = (2+3m)2 + (1)(5) + (-2+2m)3 = 0$$

$$\Rightarrow 4 + 6m + 5 - 6 + 6m = 0$$

$$\Rightarrow 12m + 3 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$$

نعوض قيمة m بمعادلة الحزمة $(**)$ نحصل على معادلة المستوي التالي :

$$Q''(x,y,z) = 5x + 4y - 10z + 7 = 0$$

وبالتالي معادلتي المستقيم المطلوب هما المعادلتين للمستويين Q' و Q'' ومنه :

$$Q'(x,y,z) = x - 4y + 6z - 13 = 0$$

$$Q''(x,y,z) = 5x + 4y - 10z + 7 = 0$$

السؤال الثاني :

أوجد معادلتي المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم للمنحني المعين بالمعادلات الوسيطية :

$$\boldsymbol{x = 2t^2 + 4sin2t \ , y = 2cos2t \ , z = 2t^2 + 3t + 1}$$

عند النقطة M_0 الموافقة لـ $t = 0$

الحــل :

اولا نوجد احداثيات النقطة M_0 وذلك بتعويض $t = 0$ بالمعادلات الوسيطية فنجد :

$$x_0 = 0 \quad , \quad y_0 = 2 \quad , \quad Z_0 = 1$$

$$M_0 = (0,2,1)$$

$$\left.\begin{matrix} x' = 4t + 8cos2t \\ y' = -4sin2t \\ z' = 4t + 3 \end{matrix}\right\} \xRightarrow{t=0 \text{ بتعويض}} \begin{cases} x'|_{t=0} = 8 \\ y'|_{t=0} = 0 \\ z'|_{t=0} = 3 \end{cases}$$

$$T = (8,0,3)$$

✔ ولدينا معادلة المستوي الناظم للمنحني في النقطة M_0 من الشكل :

$$x'|_{t=0}(X - x_0) + y'|_{t=0}(Y - y_0) + z'|_{t=0}(Z - z_0) = 0$$

حيث:

X, Y, Z احداثيات نقطة متحولة على المستوي الناظم

وبتعويض النقطة M_0 نجد :

$$8(X - 0) - 0(Y - 2) + 3(Z - 1) = 0$$

$$8X + 3Z - 3 = 0$$

✔ لدينا معادلتي المستقيم المماس للمنحني في النقطة M_0 من الشكل :

$$\frac{X - x_0}{x'|_{t=0}} = \frac{Y - y_0}{y'|_{t=0}} = \frac{Z - z_0}{z'|_{t=0}} \Longrightarrow \frac{X - 0}{8} = \frac{Y - 2}{0} = \frac{Z - 1}{3}$$

السؤال الثالث :

أثبت أن المستوي Q يقطع الكرة S ثم عين احداثيات مركز دائرة التقاطع ونصف قطرها حيث :

$$\boldsymbol{Q(x,y,z) = 3x + y - z - 9 = 0}$$

$$\boldsymbol{S(x,y,z) = (x - 4)^2 + (y - 7)^2 + (z + 1)^2 = 36}$$

الحــــل :

اولا نقوم بتعين احداثيات مركز الكرة $C(a,b,c)$ وذلك بمقارنة معادلة الكرة المعطاة مع الصيغة العامة لمعادلة الكرة التي لها شكل :

$$S(x,y,z) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

ومنه نجد مركز الكرة هو :

$$c(4,7,-1)$$

ثانيا نوجد نصف قطر الكرة بحيث نعلم أن $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$ ومنه

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{4^2 + 7^2 + (-1)^2 - 30} \quad \Rightarrow R = \sqrt{36}$$

ثالثا نوجد بعد مركز الكرة عن المستوي Q من دستور بعد نقطة عن مستوي الذي يعطى بالعلاقة :

$$\delta = \frac{|pa + qb + rc + h|}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

$$\delta = \frac{|(3)(4) + (1)(7) + (-1)(-1) + (-9)|}{\sqrt{(3)^2 + (1)^2 + (-1)^2}} = \frac{|11|}{\sqrt{11}} = \frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$$

رابعا نقارن البعد δ مع نصف الكرة R من أجل دراسة الوضع النسبي لمستوي مع الكرة نجد:

$$R = 6 > \sqrt{11} = \delta$$

وبالتالي المستوي Q يقطع الكرة S بدائرة لنعين مركز ونصف قطر هذه الدائرة بحيث أن نصف قطرها r يتعين وفق علاقة فيثاغورث في المثلث القائم :

$$R^2 = r^2 + \delta^2 \quad \Rightarrow r = \sqrt{(R)^2 - \delta^2} \quad \Rightarrow r = \sqrt{25} = 5$$

- **نوجد مركز دائرة التقاطع بالتالي :**

نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من مركز الكرة C والعمودي على المستوي Q ونفرض أن $M(x,y,z)$ نقطة متحركة على المستقيم ..

وبما أن المستقيم المفروض يعامد المستوي فإن ناظم المستوي Q يوازي المستقيم ومنه:

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y-7}{1}=\frac{z+1}{-1}=\lambda$$

ومنه نستطيع كتابة المعادلات الوسيطية بدلالة λ من الشكل :

$$(*)\ \begin{cases} x=3\lambda+4 \\ y=\lambda+7 \\ z=-\lambda-1 \end{cases}$$

نعوض المعادلات الوسيطية $(*)$ بمعادلة المستوي Q لنوجد قيمة λ :

$$Q(x,y,z)=3(3\lambda+4)+(\lambda+7)-(-\lambda-1)-9=0$$

$$\Longrightarrow\ 9\lambda+12+\lambda+7+\lambda+1-9=0$$

$$\Longrightarrow 11\lambda+11=0$$

$$\Longrightarrow \lambda=-1$$

نعوض قيمة λ بالمعادلات الوسيطية $(*)$ فنحصل على احداثيات مركز الكرة :

$$\begin{cases} x=3(-1)+4=1 \\ y=-1+7=6 \\ z=-(-1)-1=0 \end{cases}$$

مركز دائرة التقاطع هو : $(1,6,0)$

السؤال الرابع :

١) بين وضع المستقيم المعين بالمعادلات $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{4}$ بالنسبة لـ Qٌ

الحــل :

نلاحظ ان المستقيم معطى ديكارتيا بالمعادلة $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{4}$ وبفرض أن $\lambda \in R$ وسيط حقيقي بحيث :

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{4}=\lambda$$

عندئذ نجد ان المعادلات الوسيطية للمستقيم المعطى هي :

$$\frac{x-2}{3} = \lambda \Rightarrow x = 3\lambda + 2$$

$$\frac{y-1}{2} = \lambda \Rightarrow y = 2\lambda + 1$$

$$\frac{z-3}{4} = \lambda \Rightarrow z = 4\lambda + 3$$

نعوض في المعادلات الوسيطية السابقة بمعادلة المستوي Q_1 فنحصل على المعادلة من الدرجة الأولى بدلالة الوسيط λ وذلك كالتالي :

$$Q(x,y,z) = 3x + y - z - 9 = 0$$

بالتعويض نجد :

$$Q(x,y,z) = 3(3\lambda + 2) + (2\lambda + 1) - (4\lambda + 3) - 9 = 0$$

$$9\lambda + 6 + 2\lambda + 1 - 4\lambda - 3 - 9 = 0 \Rightarrow 7\lambda - 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{5}{7}$$

بما أن للمعادلة حل وحيد فإن المستقيم المعطى يقطع المستوي Q_1 بنقطة واحدة

ملاحظة :

إذا طلب ايجاد احداثيات النقطة نعوض قيمة $\lambda = \frac{5}{7}$ بالمعادلات الوسيطية .

---

٢) أوجد معادلة مستوي يمر بالفصل المشترك للمستويين P_1, P_2 و يعامد المستوي Q

$$\begin{cases} P_1(x,y,z) = 2x + y - z + 5 = 0 \\ P_2(x,y,z) = x + 3y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

الحـــل :

بما أن المستوي المطلوب يعامد المستوي Q فإنه يكون موازي لمنحني Q عندئذ :

$$\vec{v}(3,1,-1)$$

أولا نوجد معادلة حزمة المستويات المارة بالفصل المشترك للمستويين P_1, P_2 وهي من الشكل :

$$Q(\lambda) = P_1(x,y,z) + \lambda . P_2(x,y,z)$$

$$Q(\lambda) = (2+\lambda)x + (1+3\lambda)y + (-1-2\lambda)z + (5+\lambda) = 0$$

ومنه ناظم الحزمة يكون :

$$\overrightarrow{N_\lambda}(2+\lambda\,, 1+3\lambda\,, -1-2\lambda)$$

ثانيا نوجد قيمة الوسيط λ باتباع ما يلي :

بما أن المستوي المطلوب يمر بالفصل المشترك للمستويين P_1, P_2 ويوازي المنحنى $\vec{v}$ فإن :

$$\overrightarrow{N_\lambda} \perp \vec{v}$$

$$\overrightarrow{N_\lambda} . \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (2+\lambda\,, 1+3\lambda\,, -1-2\lambda)(3,1,-1) = 0$$

وبالتالي :

$$\overrightarrow{N_\lambda} . \vec{v} = (2+\lambda)3 + (1+3\lambda)(1) + (-1-2\lambda)(-1) = 0$$

$$\Longrightarrow 6 + 3\lambda + 1 + 3\lambda + 1 + 2\lambda = 0$$

$$\Longrightarrow 8\lambda + 8 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$$

ثالثا نعوض قيمة الوسيط λ بمعادلة الحزمة فنحصل على معادلة المستوي المطلوب :

$$Q_{(\lambda=-1)} = (2-1)x + (1-3)y + (-1+2)z + (5-1) = 0$$

$$Q_{(\lambda=-1)} = x - 2y + z + 4 = 0$$

وهي معادلة المستوي المطلوبة .

السؤال الرابع :

لدينا السطح S المعين بالمعادلة :

$$f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 2Z^2 + 6x + 4y - 9 = 0$$

المطلوب :

١) عين مركز تناظر السطح S .

الحــل :

أولا نقوم بحساب المشتقات الجزئية لمعادلة السطح :

$$f'_x = 6x + 6 = 0 \quad (1)$$
$$f'_y = 2y + 4 = 0 \quad (2)$$
$$f'z = 4z = 0 \quad (3)$$

بحل جملة المعادلات السابقة حلا مشتركا نحصل على مركز تناظر للسطح S ومن أجل ذلك لنوجد محدد الأمثال Δ لهذه الجملة بحيث :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

ننشر وفق العمود الأخير فنجد :

$$\Delta = 0 - 0 + 4(12 - 0) = 48 \neq 0$$

بما أن محدد الأمثال لا يساوي الصفر فإن للجملة حل وحيد بالشكل :

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad , y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad , z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta} \qquad (*)$$

بحيث نجد أن :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

ننشر وفق العمود الأخير فنجد :

$$\Delta_x = 0 - 0 + 4(-12 - 0) = -48$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

ننشر وفق العمود الأخير فنجد :

$$\Delta_y = 0 - 0 + 4(-24 - 0) = -96$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ننشر وفق العمود الأخير فنجد :

$$\Delta_z = -6(0 + 0) + 4(0 - 0) + 0 = 0$$

بالتعويض بالعلاقات $(*)$ نجد أن مركز التناظر هو النقطة التالية :

$$M\left(x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad , y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad , z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta}\right)$$

$$\xRightarrow{\text{بالتعويض نجد}} \quad M\left(x_0 = \frac{-48}{48} \quad , y_0 = \frac{-96}{48} \quad , z_0 = \frac{0}{48}\right) = (-1, -2, 0)$$

---

٢) عين نوع المجسم الممثل بالمعادلة السابقة :

إن معادلة السطح المعطاة هي من الشكل :

$$F(x, y, z) + 2P(x, y, z) + d = 0$$

لنحولها إلى الشكل :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$$

نعوض :

$$3x^2 + y^2 + 2z^2 + 6x + 4y - 9 = 0$$

$$\Longrightarrow 3x^2 + 6x + y^2 + 4y + 2z^2 - 9 = 0$$

$$\Longrightarrow 3(x^2 + 2x) + (y^2 + 4y) + 2z^2 = 9$$

بالإتمام الى المربع الكامل :

$$\Longrightarrow 3(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + 2z^2 = 9 + 3 + 4$$

$$\Longrightarrow 3(x+1)^2 + (y+2)^2 + 2z^2 = 16 \qquad (*)$$

ومن ثم نجعل مبدأ الاحداثيات هو مركز تناظر وذلك بواسطة الانسحاب من خلال دساتير الانسحاب نجد :

$$X = x + 1 \quad , Y = y + 2 \quad , Z = z$$

نعوض دساتير الانسحاب بالعلاقة $(*)$ نجد :

$$3x^2 + y^2 + 2z^2 = 16$$

بالمطابقة مع الشكل

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$$

نجد أن :

$$A = 3 \quad , B = 1 \quad , C = 2 \quad , \quad D = -16$$

وبتقسيم طرفي المعادلة على $(-D)$ يكون :

$$\frac{X^2}{\frac{16}{3}} + \frac{Y^2}{16} + \frac{Z^2}{8} = 1$$

بالإعادة الى دساتير الانسحاب نعوض فنجد :

$$\frac{(x+1)^2}{\frac{16}{3}}+\frac{(y+2)^2}{16}+\frac{(z-0)^2}{8}=1$$

وهي عبارة عن معادلة مجسم قطع ناقص مركزه $(1,2,0)$

---

٣) أوجد معادلة المخروط الموجه للسطح S .

إن معادلة المخروط الموجه تنتج من معادلة السطح S نفسها وذلك بإهمال الحدود الخطية والحد الثابت ومن أجل ذلك نجد أن المعادلة المطلوبة هي من الشكل :

$$S' = 3x^2+y^2+2z^2=0$$

---

٤) أوجد مقطع السطح S مع المستوي xoy .

الحـــل :

لإيجاد مقطع السطح S مع المستوي xoy نفرض أن $z=0$

بالتعويض في المعادلة نجد أنه ينتج معادلتين ومنه :

$$\frac{(x+1)^2}{\frac{16}{3}}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$$

معادلة قطع ناقص مركزه $(-1,-2)$

--- انتهى الحـــل ---

السؤال الأول :

لدينا المستويان :

$$Q_1(x,y,z) = x + y + 5Z - 2 = 0$$

$$Q_2(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0$$

١) أوجد مسقط المستقيم $D\begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0 \\ x - y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ **على المستوي** Q_2

٢) أوجد معادلة مستوي يمر بالفصل المشترك للمستويين Q_1, Q_2 **ويوازي المنحنى** $\vec{v}(2,0,1)$ **.**

٣) أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية المستويين Q_1, Q_2**.**

السؤال الثاني :

لدينا السطح S **المعين بالمعادلة :**

$$f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz - 6y + 8z + 1 = 0$$

المطلوب :

١) أوجد معادلتي المستقيم الناظم ومعادلة المستوي المماس لهذا السطح في النقطة $M_0(0,2,1)$

٢) أوجد مركز تناظر السطح S .

٣) أوجد معادلة المخروط الموجه للسطح S ، هل هذا المخروط مخروط مقارب مع التعليل ؟

السؤال الثالث :

١) عين وسيط λ حتى تتعامد الكرتان :

$$S_1(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2Z^2 - \lambda y + 2z = 0$$

$$S_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + Z^2 + \lambda x - \lambda y - 4Z + \frac{\lambda}{2} = 0$$

٢) إذا كانت $\lambda = 1$ بين وضع المستقيم المعطى بالمعادلات الوسيطية التالية :

$$x = 1 + 2t \quad , y = 1 - t \quad , z = 2t$$

--- انتهت الأسئلة ---

حل دورة الفصل الثاني ٢٠١٥

السؤال الأول:

لدينا المستويان :

$$Q_1(x,y,z) = x + y + 5Z - 2 = 0$$

$$Q_2(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0$$

١) أوجد مسقط المستقيم $D \begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0 \\ x - y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ **على المستوي** Q_2

الحـــل :

أولاً نقوم بإيجاد حزمة المستويات المارة من المستقيم D حيث أن الصيغة العامة لمعادلة الحزمة تعطى بالشكل :

$$Q(\lambda) = Q_1(x,y,z) + \lambda . Q_2(x,y,z)$$

$$Q(\lambda) = (2x + y + z - 2) + \lambda . (x - y - 2z + 1) = 0$$

$$Q(\lambda) = 2x + \lambda x + y - \lambda y + z - 2\lambda z - 2 + \lambda = 0$$

$$Q(\lambda) = (2 + \lambda)x + (1 - \lambda)y + (1 - 2\lambda)z - 2 + \lambda = 0$$

$$\overrightarrow{N_\lambda}(2 + \lambda , 1 - \lambda , 1 - 2\lambda)$$

ثانيا نوجد قيمة الوسيط λ باتباع ما يلي :

نختار من الحزمة السابقة مستوياً Q يعامد Q_2 وبهذا يكون :

$$\overrightarrow{N_\lambda} \perp \overrightarrow{N_2}$$

ومنه :

$$\overrightarrow{N_\lambda}.\overrightarrow{N_2}=0 \Leftrightarrow (2+\lambda, 1-\lambda, 1-2\lambda)(1,1,1)=0$$

وبالتالي :

$$\overrightarrow{N_\lambda}.\overrightarrow{N_2}=(2+\lambda)1+(1-\lambda)1+(1-2\lambda)1=0$$

$$\Rightarrow 4-2\lambda=0$$

$$\Rightarrow \lambda=2$$

ثالثا نعوض قيمة الوسيط λ بمعادلة الحزمة فنحصل على معادلة المستوي المطلوب :

$$Q_{(\lambda=2)}=(2+2)x+(1-2)y+(1-2(2))z-2+2=0$$

$$\Leftrightarrow Q_{(\lambda=2)}=4x-y-3z=0$$

وبالتالي يكون مسقط المستقيم D على المستقيم D' الذي يشكل الفصل المشترك للمستويين Q, Q_2 أي يتعين بالمعادلتين :

$$D\begin{cases} Q(x,y,z)=4x-y-3z=0 \\ Q_2(x,y,z)=x+y+z-1=0 \end{cases}$$

٢) أوجد معادلة مستوي يمر بالفصل المشترك للمستويين Q_1, Q_2 ويوازي المنحنى $\vec{v}(2,0,1)$.

الحــــل :

أولا نوجد معادلة حزمة المستويات المارة بالفصل المشترك للمستويين Q_1, Q_2 وهي من الشكل :

$$Q(\lambda)=Q_1(x,y,z)+\lambda.Q_2(x,y,z)$$

$$Q(\lambda)=(1+\lambda)x+(1+\lambda)y+(5+\lambda)z+(-2-\lambda)=0$$

ومنه ناظم الحزمة يكون :

$$\overrightarrow{N_\lambda}(1+\lambda\,,1+\lambda\,,5+\lambda)$$

ثانيا نوجد قيمة الوسيط λ باتباع ما يلي :

بما أن المستوي المطلوب يمر بالفصل المشترك للمستويين Q_1, Q_2 ويوازي المنحنى $\vec{v}$ فإن:

$$\overrightarrow{N_\lambda} \perp \vec{v}$$

ومنه :

$$\overrightarrow{N_\lambda}.\vec{v}=0 \iff (1+\lambda\,,1+\lambda\,,5+\lambda)(2,0,1)=0$$

وبالتالي :

$$\overrightarrow{N_\lambda}.\vec{v}=(1+\lambda)2+(1+\lambda)0+(5+\lambda)1=0$$

$$\Rightarrow 2+2\lambda+0+5+\lambda=0$$

$$\Rightarrow 7+3\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{7}{3}$$

ثالثا نعوض قيمة الوسيط λ بمعادلة الحزمة فنحصل على معادلة المستوى المطلوب :

$$Q(\lambda)=\left(1-\frac{7}{3}\right)x+\left(1-\frac{7}{3}\right)y+\left(5-\frac{7}{3}\right)z+\left(-2+\frac{7}{3}\right)=0$$

$$Q\left(-\frac{7}{3}\right)=\left(-\frac{4}{3}\right)x+\left(-\frac{4}{3}\right)y+\left(\frac{8}{3}\right)z+\frac{1}{3}=0$$

نضرب طرفي المعادلة السابقة بـ 3 فنحصل على معادلة المستوي المطلوب :

$$Q\left(-\frac{7}{3}\right) = -4x - 4y + 8z + 1 = 0$$

٣) أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية المستويين Q_1, Q_2 .

الحــل :

$$Q_1 = x + y + 5Z - 2 = 0$$

$$Q_2 = x + y + z - 1 = 0$$

بما أن مجموعة نقاط المستوي المنصف متساوية البعد عن المستويين :

$$\frac{|Q_1(x,y,z)|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}} = \frac{|Q_2(x,y,z)|}{\sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}$$

$$\frac{|x + y + 5Z - 2|}{\sqrt{1 + 1 + 25}} = \frac{|x + y + z - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}}$$

$$\frac{|x + y + 5Z - 2|}{\sqrt{27}} = \frac{|x + y + z - 1|}{\sqrt{3}}$$

ومنه :

$$\sqrt{3}\,|x + y + 5Z - 2| = \sqrt{27}|x + y + z - 1|$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}(x + y + 5Z - 2) = \pm\sqrt{27}(x + y + z - 1)$$

وبالتالي معادلة المستوي الموافق للإشارة $(+)$ هي :

$$\sqrt{3}(x + y + 5Z - 2) = \sqrt{27}(x + y + z - 1)$$

$$\sqrt{3}\,x + \sqrt{3}\,y + 5\sqrt{3}\,Z - 2\sqrt{3} = \sqrt{27}x + \sqrt{27}y + \sqrt{27}z - \sqrt{27}$$

$$(\sqrt{3} - \sqrt{27})x + (\sqrt{3} - \sqrt{27})y + (5\sqrt{3} - \sqrt{27})Z + (\sqrt{27} - 2\sqrt{3}) = 0..(1)$$

ومعادلة المستوي الموافق للإشارة $(-)$ هي :

$$\sqrt{3}(x+y+5Z-2)=-\sqrt{27}(x+y+z-1)$$

$$\sqrt{3}\,x+\sqrt{3}\,y+5\sqrt{3}\,Z-2\sqrt{3}\ =-\sqrt{27}x-\sqrt{27}y-\sqrt{27}z+\sqrt{27}$$

$$(\sqrt{3}+\sqrt{27})x+(\sqrt{3}+\sqrt{27})y+(5\sqrt{3}+\sqrt{27})Z+(-\sqrt{27}-2\sqrt{3})=0\ \dots(2)$$

ومن أجل تحديد معادلة المستوي المنصف الداخلي والخارجي نقوم بأخذ الجداء الداخلي لكل من ناظمي المستويين Q_1, Q_2 بحيث :

$\overrightarrow{N_1}(1,1,5)$ ناظم في المستوي Q_1 و $\overrightarrow{N_2}(1,1,1)$ ناظم في المستوي Q_2 ومنه :

$$\overrightarrow{N_1}.\overrightarrow{N_2}=1+1+5=7$$

وبالتالي $\overrightarrow{N_1}.\overrightarrow{N_2}=7>0$

أي أن معادلة المستوي المنصف الداخلي هي الموافقة للإشارة $(-)$ وهي المعادلة (2)

$$(\sqrt{3}+\sqrt{27})x+(\sqrt{3}+\sqrt{27})y+(5\sqrt{3}+\sqrt{27})Z+(-\sqrt{27}-2\sqrt{3})=0$$

والمنصف الخارجي هي الموافقة للإشارة $(+)$ وهي المعادلة (1)

$$(\sqrt{3}-\sqrt{27})x+(\sqrt{3}-\sqrt{27})y+(5\sqrt{3}-\sqrt{27})Z+(\sqrt{27}-2\sqrt{3})=0$$

السؤال الثاني :

لدينا السطح S المعين بالمعادلة :

$$\boldsymbol{f(x,y,z)=x^2-y^2+2z^2+2xy-2xz-6y+8z+1=0}$$

المطلوب :

١) أوجد معادلتي المستقيم الناظم ومعادلة المستوي المماس لهذا السطح في النقطة $M_0(0,2,1)$

الحــل :

أولا نوجد المشتقات الجزئية للتابع f عند النقطة M_0 :

$$\left.\begin{array}{r} f'_x = 2x + 2y - 2z \\ f'_y = -2y + 2x - 6 \\ f'z = 4z - 2x + 8 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{بتعويض احداثيات النقطة } M_0} \left\{\begin{array}{l} f'|_{x_0} = 2 \\ f'|_{y_0} = -10 \\ f'|z_0 = 12 \end{array}\right.$$

ثانيا لدينا معادلة المستوي المماس للسطح S من الشكل :

$$f'|_{x_0}(X - x_0) + f'|_{y_0}(Y - y_0) + f'|z_0(Z - z_0) = 0 \quad (1)$$

حيث:

X, Y, Z احداثيات نقطة متحولة على المستوي المماس .

وبتعويض قيم المشتقات الجزئية عند النقطة M_0 نجد :

$$2(X - 0) - 10(Y - 2) + 12(Z - 1) = 0$$

$$2X - 10Y + 12Z + 8 = 0$$

ثالثا لدينا معادلتي المستقيم الناظم للسطح S في النقطة M_0 من الشكل :

$$\frac{X - x_0}{f'|_{x_0}} = \frac{Y - y_0}{f'|_{y_0}} = \frac{Z - z_0}{f'|z_0} \Rightarrow \frac{X - 0}{2} = \frac{Y - 2}{-10} = \frac{Z - 1}{12}$$

حيث:

X, Y, Z احداثيات نقطة متحولة على المستقيم الناظم .

٢) أوجد مركز تناظر السطح S .

الحـــل :

أولا نقوم بحساب المشتقات الجزئية لمعادلة السطح :

$$f'_x = 2x + 2y - 2z = 0 \quad (1)$$
$$f'_y = -2y + 2x - 6 = 0 \quad (2)$$
$$f'z = 4z - 2x + 8 = 0 \quad (3)$$

بحل جملة المعادلات السابقة حلا مشتركا نحصل على مركز تناظر للسطح S ومن أجل ذلك لنوجد محدد الأمثال Δ لهذه الجملة بحيث :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

ننشر وفق العمود الأخير فنجد :

$$\Delta = -2(0-4) - 0 + 4(-4-4) = -24 \neq 0$$

بما أن محدد الأمثال لا يساوي الصفر فإن للجملة حل وحيد بالشكل :

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad , y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad , z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta} \quad (*)$$

بحيث نجد أن :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 0 \\ -8 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

ننشر وفق العمود الأخير فنجد :

$$\Delta_x = -2(0-16) - 0 + 4(0-12) = -16$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 0 \\ -2 & -8 & 4 \end{vmatrix}$$

ننشر وفق العمود الأخير فنجد :

$$\Delta_y = -2(-16+12) - 0 + 4(12-0) = 56$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \\ -2 & 0 & -8 \end{vmatrix}$$

ننشر وفق العمود الأخير فنجد :

$$\Delta_z = 0 - 6(0+4) - 8(-4-4) = -88$$

بالتعويض بالعلاقات $(*)$ نجد أن مركز التناظر هو النقطة التالية :

$$M\left(x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta}\right)$$

$$\xRightarrow{\text{بالتعويض نجد}} M\left(x_0 = \frac{-16}{-24}, y_0 = \frac{56}{-24}, z_0 = \frac{-88}{-24}\right) = \left(\frac{4}{6}, -\frac{7}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

---

٣) أوجد معادلة المخروط الموجه للسطح S ، هل هذا المخروط مخروط مقارب مع التعليل ؟

الحــل :

إن معادلة المخروط الموجه تنتج من معادلة السطح S نفسها وذلك بإهمال الحدود الخطية والحد الثابت ومن أجل ذلك نجد أن المعادلة المطلوبة من الشكل :

$$S' = x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz = 0$$

ونقول عن المخروط الموجه أنه مخروط مقارب وذلك لأن المشتقات الجزئية لمعادلة السطح S ذاتها المشتقات الجزئية لمعادلة المخروط S' وبالتالي مركز تناظر السطح S يختلف عن مركز تناظر المخروط S' .

السؤال الثالث :

١) عين وسيط λ حتى تتعامد الكرتان :

$$\mathbf{S_1(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2Z^2 - \lambda y + 2z = 0}$$

$$\mathbf{S_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + Z^2 + \lambda x - \lambda y - 4Z + \frac{\lambda}{2} = 0}$$

الحــل :

لتعامد الكرتان يجب أن يتحقق الشرط التالي :

$$a_1.a_2 + b_1.b_2 + c_1.c_2 = \frac{d_1 + d_2}{2} \qquad (*)$$

بحيث أن a_1, b_1, c_1 هي احداثيات مركز الكرة S_1 .

بحيث أن a_2, b_2, c_2 هي احداثيات مركز الكرة S_2 .

وبالتالي من الكرة S_1 نجد :

$$\mathrm{S}_1(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2Z^2 - \lambda y + 2z = 0$$

نقسم طرفي المعادلة السابقة على (2) لتصبح من الشكل :

$$\mathrm{S^*}_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + Z^2 - \frac{\lambda}{2}y + z = 0$$

بالمقارنة مع الشكل العام لمعادلة الكرة نجد :

$$\begin{cases} -2a_1 = 0 \\ -2b_1 = -\dfrac{\lambda}{2} \\ -2c_1 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = \dfrac{\lambda}{4} \\ c_1 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

عندئذ مركز الكرة $\mathrm{S^*}_1$ يكون :

$$c_1\left(0, \ \frac{\lambda}{4}, -\frac{1}{2}\right) \ ; \ \ d = 0$$

وبالتالي من الكرة S_2 نجد :

$$S_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + Z^2 + \lambda x - \lambda y - 4Z + \frac{\lambda}{2} = 0$$

بالمقارنة مع الشكل العام لمعادلة الكرة نجد :

$$\begin{cases} -2a_1 = \lambda \\ -2b_1 = -\lambda \\ -2c_1 = -4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{\lambda}{2} \\ b_1 = \frac{\lambda}{2} \\ c_1 = 2 \end{cases}$$

عندئذ مركز الكرة S_2 يكون :

$$c_1\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, 2\right) \; ; \; d = 0$$

بتعويض المعطيات السابقة بالعلاقة $(*)$ نجد أن :

$$(0).\left(-\frac{\lambda}{2}\right) + \left(\frac{\lambda}{4}\right).\left(\frac{\lambda}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right).(2) = \frac{(0) + \left(\frac{\lambda}{2}\right)}{2} =$$

$$\frac{1}{8}\lambda^2 - 1 = \frac{\lambda}{4}$$

نضرب الطرفين بـ 8

$$\lambda^2 - 8 = 2\lambda \Longrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

نحل المعادلة السابقة باستخدام الـ Δ بحيث :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-8) = 4 + 32 = 36 > 0$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 6$$

وبالتالي لدينا قيمتان للوسيط λ يحققان تعامد الكرتين السابقتين وهما :

إما :

$$\lambda_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-6}{2} = -2 \quad \Rightarrow \lambda_1 = -2$$

أو :

$$\lambda_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+6}{2} = -2 \quad \Rightarrow \lambda_2 = 4$$

---

٢) إذا كانت $\lambda = 1$ بين وضع المستقيم المعطى بالمعادلات الوسيطية التالية بالنسبة للكرة S_1 :

$$\boldsymbol{x = 1 + 2t \quad , y = 1 - t \quad , z = 2t}$$

الحـــل :

من أجل $\lambda = 1$ نجد أن معادلة الكرة S_1 تصبح من الشكل :

$$S_1(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2Z^2 - y + 2z = 0$$

نقسم طرفي المعادلة السابقة على (2) لتصبح من الشكل :

$$S^*{}_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + Z^2 - \frac{1}{2}y + z = 0$$

والان لندرس وضع المستقيم المعطى بالمعادلات الوسيطية بالنسبة للكرة $S^*{}_1$ ومن أجل ذلك نقوم بما يلي :

أولا نعوض المعادلات الوسيطية بمعادلة الكرة فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة للوسيط t :

$$\Rightarrow (1+2t)^2 + (1-t)^2 + (2t)^2 - \frac{1}{2}(1-t) + (2t) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + 4t + 4t^2 + 1 - 2t + t^2 + 4t^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t + 2t = 0$$

$$\Rightarrow 9t^2 + \frac{9}{2}t + \frac{3}{2} = 0$$

نضرب طرفي المعادلة السابقة بـــ $\frac{2}{3}$ نجد :

$$6t^2 + 3t + 1 = 0$$

فنجد :

$$a = 6 \quad , \quad b = 3 \quad , \quad c = 1$$

ثانيا باستخدام المميز Δ نوجد الحلول :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (3)^2 - 4(6)(1) = 9 - 24 = -15 < 0$$

وبالتالي المعادلة مستحيلة الحل ومن أجل ذلك المستقيم غير قاطع للكرة بأي نقطة تقع خارج الكرة S_1^* .

--- انتهى الحــل ---

السؤال الأول :

لدينا المستويان :

$$Q_1(x,y,z) = 2x + y + 4Z - 5 = 0$$

$$Q_2(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0$$

المطلوب :

١) بين وضع المستقيم المعين بالمعادلات $\frac{z}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{x+3}{3}$ بالنسبة لـ Q_1

٢) أوجد معادلة مستوي يمر بالفصل المشترك للمستويين Q_1, Q_2 و يعامد المستوي $Q(x,y,z) = x - y + z = 0$

٣) أوجد نظير النقطة $M_1(0,1,2)$ بالنسبة للمستوي Q_2

السؤال الثاني :

أوجد معادلتي المستقيم القاطع للمستقيمين :

$$D_1 \begin{cases} Q_1(x,y,z) = x + y + z - 3 = 0 \\ Q_2(x,y,z) = y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$D_2 \begin{cases} Q_3(x,y,z) = 2x + y - 2z + 2 = 0 \\ Q_4(x,y,z) = 3x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

والموازي للمتجه $\vec{v} = (2,5,3)$

السؤال الثالث :

عين نصف قطر ومركز دائرة تقاطع المستوي Q مع الكرة S حيث :

$$Q(x, y, z) = 3x + y - z - 9 = 0$$

$$S(x, y, z) = x^2 + y^2 + Z^2 - 8x - 14y + 2Z + 30 = 0$$

السؤال الرابع :

لدينا السطح S المعين بالمعادلة :

$$f(x, y, z) = 2x^2 - 3y^2 - 4Z^2 - 12x - 6y - 27 = 0$$

المطلوب :

١) أوجد معادلتي المستقيم الناظم ومعادلة المستوي المماس للسطح S في النقطة $M_0(1, 0, 2)$

٢) عين نوع السطح S

٣) أوجد مقطع السطح S مع المستوي xoy .

٤) أوجد معادلة المخروط الموجه للسطح S .

--- انتهت الأسئلة ---

حل دورة الفصل الأول ٢٠١٥

السؤال الأول:

لدينا المستويان :

$$Q_1(x,y,z) = 2x + y + 4Z - 5 = 0$$

$$Q_2(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0$$

المطلوب :

١) بين وضع المستقيم المعين بالمعادلات $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{4}$ بالنسبة لـ Q_1

الحـــل :

نلاحظ ان المستقيم معطى ديكارتيا بالمعادلة $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{4}$ وبفرض أن $\lambda \in R$ وسيط حقيقي بحيث :

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{4} = \lambda$$

عندئذ نجد ان المعادلات الوسيطية للمستقيم المعطى هي :

$$\frac{x+3}{3} = \lambda \Rightarrow x = 3\lambda - 3$$

$$\frac{y-1}{-1} = \lambda \Rightarrow y = -\lambda + 1$$

$$\frac{z}{4} = \lambda \Rightarrow z = 4\lambda$$

نعوض في المعادلات الوسيطية السابقة بمعادلة المستوي Q_1 فنحصل على المعادلة من الدرجة الأولى بدلالة الوسيط λ وذلك كالتالي :

$$Q_1(x,y,z) = 2x + y + 4Z - 5 = 0$$

بالتعويض نجد :

$$Q_1(x,y,z) = 2(3\lambda - 3) + (-\lambda + 1) + 4(4\lambda) - 5 = 0$$

$$6\lambda - 6 - \lambda + 1 + 16\lambda - 5 = 0 \Longrightarrow 21\lambda - 10 = 0$$

$$\lambda = \frac{10}{21}$$

بما أن للمعادلة حل وحيد فإن المستقيم المعطى يقطع المستوي Q_1 بنقطة واحدة

ملاحظة :

إذا طلب ايجاد احداثيات النقطة نعوض قيمة $\lambda = \frac{10}{21}$ بالمعادلات الوسيطية .

---

٢) أوجد معادلة مستوي يمر بالفصل المشترك للمستويين Q_1, Q_2 و يعامد المستوي

$$\boldsymbol{Q(x,y,z) = x - y + z = 0}$$

الحــــل :

بما أن المستوي المطلوب يعامد المستوي Q فإنه يكون موازي لمنحني Q عندئذ :

$$\vec{v}(1,-1,1)$$

أولا نوجد معادلة حزمة المستويات المارة بالفصل المشترك للمستويين Q_1, Q_2 وهي من الشكل :

$$Q(\lambda) = Q_1(x,y,z) + \lambda . Q_2(x,y,z)$$

$$Q(\lambda) = (2+\lambda)x + (1+\lambda)y + (4+\lambda)z + (-5-\lambda) = 0$$

ومنه ناظم الحزمة يكون :

$$\overrightarrow{N_\lambda}(2+\lambda\,, 1+\lambda\,, 4+\lambda)$$

ثانيا نوجد قيمة الوسيط λ باتباع ما يلي :

بما أن المستوي المطلوب يمر بالفصل المشترك للمستويين Q_1, Q_2 ويوازي المنحنى $\vec{v}$ فإن:

$$\overrightarrow{N_\lambda} \perp \vec{v}$$

ومنه :

$$\overrightarrow{N_\lambda}.\vec{v} = 0 \iff (2+\lambda, 1+\lambda, 4+\lambda)(1,-1,1) = 0$$

وبالتالي :

$$\overrightarrow{N_\lambda}.\vec{v} = (2+\lambda)1 + (1+\lambda)(-1) + (4+\lambda)1 = 0$$

$$\Rightarrow 2+\lambda-1+4+\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda+5 = 0 \Rightarrow \lambda = -5$$

ثالثا نعوض قيمة الوسيط λ بمعادلة الحزمة فنحصل على معادلة المستوي المطلوب :

$$Q(\lambda) = (2-5)x + (1-5)y + (4-5)z + (-5+5) = 0$$

$$Q(-5) = -3x - 4y - z = 0$$

وهي معادلة المستوي المطلوبة .

---

٣) أوجد نظير النقطة $M_1(0,1,2)$ بالنسبة للمستوي Q_2

الحــل :

بفرض $M_2(x_2, y_2, z_2)$ هي النقطة المطلوبة نظيرة M_1 بالنسبة للمستوي Q_2 عندئذ لإيجاد احداثيات M_2 نتبع الخطوات التالية :

اولا بما أن M_2 نظيرة M_1 للمستوي Q_2 عندئذ القطعة المستقيمة $\overrightarrow{M_1M_2}$ توازي الناظم للمستوي Q_2 ومن علاقة التوازي نجد :

$$\frac{x_2-0}{1}=\frac{y_2-1}{1}=\frac{z_2-2}{1}$$

نكتب المعادلات بالشكل الوسيطي بدلالة λ نجد :

$$(1)\quad\begin{cases} x_2=\lambda \\ y_2=\lambda+1 \\ z_2=\lambda+2 \end{cases}$$

بما أن النقطتان M_1, M_2 متناظرتان بالنسبة لـ Q_2 فرضا نجد أن المستوي Q_2 يعامد القطعة المستقيمة $\overrightarrow{M_1M_2}$ في منتصفها عندئذ يوجد نقطة ولتكن M_0 تعطى احداثياتها بالشكل :

$$M_0\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

وبما أن M_0 تحقق معادلة المستوي Q_2 ((لأن M_0 تنتمي الى المستوي Q_2))

$$Q_2(x,y,z)=x+y+z-1=0$$

$$Q_2(x,y,z)=\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{z_1+z_2}{2}-1=0$$

نضرب طرفي المعادلة بـ 2 نجد

$$Q_2(x,y,z)=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2)-2=0$$

بتعويض احداثيات M_1 نجد :

$$=(0+x_2)+(1+y_2)+(2+z_2)-2=0$$

$$x_2+y_2+z_2+1=0\qquad(2)$$

نعوض (1) في (2) نجد :

$$\lambda + \lambda + 1 + \lambda + 2 + 1 = 0$$

$$\Longrightarrow 3\lambda + 4 = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda = -\frac{4}{3}$$

نعوض λ بالمعادلة (1)فنحصل على احداثيات النقطة M_2 وهي نظيرة M_1

$$(1)\begin{cases} x_2 = -\frac{4}{3} \\ y_2 = -\frac{4}{3} + 1 = -\frac{1}{3} \\ z_2 = -\frac{4}{3} + 2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$M_2\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

السؤال الثاني :

أوجد معادلتي المستقيم القاطع للمستقيمين :

$$D_1\begin{cases} \boldsymbol{Q_1(x,y,z) = x + y + z - 3 = 0} \\ \boldsymbol{Q_2(x,y,z) = y - z + 2 = 0} \end{cases}$$

$$D_2\begin{cases} \boldsymbol{Q_3(x,y,z) = 2x + y - 2z + 2 = 0} \\ \boldsymbol{Q_4(x,y,z) = 3x + 2z + 1 = 0} \end{cases}$$

والموازي للمتجه $\boldsymbol{\vec{v} = (2,5,3)}$

الحــل :

لإيجاد معادلتي المستقيم المطلوب نتبع الخطوات التالية :

أولا نوجد معادلة حزمة المستويات المارة بالمستقيم D_1 ثم نختار مستوي بحيث يكون موازي للمتجه $\vec{v}$:

$$Q(\lambda) = Q_1(x, y, z) + \lambda . Q_2(x, y, z)$$

$$Q(\lambda) = x + (1+\lambda)y + (1-\lambda)z + (-3+2\lambda) = 0 \quad (*)$$

ومنه ناظم الحزمة يكون :

$$\overrightarrow{N_\lambda}(1\,, 1+\lambda\,, 1-\lambda)$$

نوجد قيمة الوسيط λ باتباع ما يلي :

نختار مستوي بحيث يكون موازي للمتجه $\vec{v}$ بأن نبحث عن قيمة لـλ بحيث :

$$\overrightarrow{N_\lambda} \perp \vec{v}$$

ومنه :

$$\overrightarrow{N_\lambda} . \vec{v} = 0 \iff (1\,, 1+\lambda\,, 1-\lambda)(2,5,3) = 0$$

وبالتالي :

$$\overrightarrow{N_\lambda} . \vec{v} = (1)2 + (1+\lambda)(5) + (1-\lambda)3 = 0$$

$$\Rightarrow 2 + 5 + 5\lambda + 3 - 3\lambda = 0$$

$$\Rightarrow 2\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda = -5$$

نوجد قيمة λ بمعادلة الحزمة $(*)$ نحصل على معادلة المستوي التالي :

$$Q'(x, y, z) = x - 4y + 6z - 13 = 0$$

ثانيا نوجد معادلة حزمة المستويات المارة بالمستقيم D_2 ثم نختار مستوي بحيث يكون موازي للمتجه $\vec{v}$:

$$Q(m) = Q_3(x,y,z) + m.Q_4(x,y,z)$$

$$Q(m) = (2+3m)x + y + (-2+2m)z + (2+m) = 0 \quad (**)$$

ومنه ناظم الحزمة يكون :

$$\overrightarrow{N_m}(2+3m, 1, -2+2m)$$

نوجد قيمة الوسيط λ باتباع ما يلي :

نختار مستوي بحيث يكون موازي للمتجه $\vec{v}$ بأن نبحث عن قيمة لـm بحيث :

$$\overrightarrow{N_m} \perp \vec{v}$$

ومنه :

$$\overrightarrow{N_m}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow (2+3m, 1, -2+2m)(2,5,3) \ = 0$$

وبالتالي :

$$\overrightarrow{N_m}.\vec{v} = (2+3m)2 + (1)(5) + (-2+2m)3 = 0$$

$$\Longrightarrow 4 + 6m + 5 - 6 + 6m = 0$$

$$\Longrightarrow 12\mathrm{m} + 3 = 0 \Longrightarrow m = -\frac{1}{4}$$

نوجد قيمة m بمعادلة الحزمة $(**)$ نحصل على معادلة المستوي التالي :

$$Q''(x,y,z) = 5x - 4y - 10z + 7 = 0$$

وبالتالي معادلتي المستقيم المطلوب هما المعادلتين للمستويين Q' و Q'' ومنه :

$$Q'(x,y,z) = x - 4y + 6z - 13 = 0$$

$$Q''(x,y,z) = 5x - 4y - 10z + 7 = 0$$

السؤال الثالث :

عين نصف قطر ومركز دائرة تقاطع المستوي Q مع الكرة S حيث :

$$Q(x,y,z) = 3x + y - z - 9 = 0$$

$$S(x,y,z) = x^2 + y^2 + Z^2 - 8x - 14y + 2Z + 30 = 0$$

الحـــل :

اولا نقوم بتعين احداثيات مركز الكرة $C(a,b,c)$ وذلك بمقارنة معادلة الكرة المعطاة مع الصيغة العامة لمعادلة الكرة التي لها شكل :

$$S(x,y,z) = x^2 + y^2 + Z^2 - 2ax - 2by - 2cZ + d = 0$$

ومنه نجد مركز الكرة هو :

$$c(4,7,-1)$$

ثانيا نوجد نصف قطر الكرة بحيث نعلم أن

$$d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$$

ومنه:

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{4^2 + 7^2 + (-1)^2 - 30} \quad \Rightarrow R = \sqrt{36}$$

ثالثا نوجد بعد مركز الكرة عن المستوي Q من دستور بعد نقطة عن مستوي الذي يعطى بالعلاقة :

$$\delta = \frac{|pa + qb + rc + h|}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

$$\delta=\frac{|(3)(4)+(1)(7)+(-1)(-1)+(-9)|}{\sqrt{(3)^2+(1)^2+(-1)^2}}=\frac{|11|}{\sqrt{11}}=\frac{11}{\sqrt{11}}=\sqrt{11}$$

رابعا نقارن البعد δ مع نصف الكرة R من أجل دراسة الوضع النسبي لمستوي مع الكرة نجد:

$$R=6>\sqrt{11}=\delta$$

وبالتالي المستوي Q يقطع الكرة S بدائرة لنعين مركز ونصف قطر هذه الدائرة بحيث أن نصف قطرها r يتعين وفق علاقة فيثاغورث في المثلث القائم :

$$R^2=r^2+\delta^2 \Rightarrow r=\sqrt{(R)^2-\delta^2} \Rightarrow r=\sqrt{25}=5$$

- نوجد مركز دائرة التقاطع بالتالي :

نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من مركز الكرة C والعمودي على المستوي Q ونفرض أن $M(x,y,z)$ نقطة متحركة على المستقيم وبما أن المستقيم المفروض يعامد المستوي فإن ناظم المستوي Q يوازي المستقيم ومنه:

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y-7}{1}=\frac{z+1}{-1}=\lambda$$

ومنه نستطيع كتابة المعادلات الوسيطية بدلالة λ من الشكل :

$$(*)\begin{cases} x=3\lambda+4 \\ y=\lambda+7 \\ z=-\lambda-1 \end{cases}$$

نعوض المعادلات الوسيطية $(*)$ بمعادلة المستوي Q لنوجد قيمة λ :

$$Q(x,y,z)=3(3\lambda+4)+(\lambda+7)-(-\lambda-1)-9=0$$

$$\Rightarrow 9\lambda+12+\lambda+7+\lambda+1-9=0$$

$$\Rightarrow 11\lambda+11=0$$

$$\Rightarrow \lambda = -1$$

نعوض قيمة λ بالمعادلات الوسيطية $(*)$ فنحصل على احداثيات مركز الكرة :

$$\begin{cases} x = 3(-1) + 4 = 1 \\ y = -1 + 7 = 6 \\ z = -(-1) - 1 = 0 \end{cases}$$

مركز تقاطع الدائرة هو : $(1,6,0)$

السؤال الرابع :

لدينا السطح S المعين بالمعادلة :

$$\boldsymbol{f(x,y,z) = 2x^2 - 3y^2 - 4Z^2 - 12x - 6y - 27 = 0}$$

المطلوب :

١) أوجد معادلتي المستقيم الناظم ومعادلة المستوي المماس للسطح S في النقطة $\boldsymbol{M_0(1,0,2)}$

الحــل :

أولا نوجد المشتقات الجزئية للتابع f عند النقطة M_0 :

$$\left.\begin{matrix} f'_x = 4x - 12 \\ f'_y = -6y - 6 \\ f'z = -8z \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{بتعويض احداثيات النقطة } M_0} \begin{cases} f'|_{x_0} = -8 \\ f'|_{y_0} = -6 \\ f'|z_0 = -16 \end{cases}$$

ثانيا لدينا معادلة المستوي المماس للسطح S من الشكل :

$$f'|_{x_0}(X - x) + f'|_{y_0}(Y - y) + f'|z_0(Z - z) = 0 \quad (1)$$

حيث:

X, Y, Z احداثيات نقطة متحولة على المستوي المماس .

وبتعويض قيم المشتقات الجزئية عند النقطة M_0 نجد :

$$-8(X-1) - 6(Y-0) - 16(Z-2) = 0$$

ومنه معادلة المستوي المماس للسطح S :

$$-8X - 6Y - 16Z + 40 = 0$$

ثالثا لدينا معادلتي المستقيم الناظم للسطح S من الشكل :

$$\frac{X-x_0}{f'|_{x_0}} = \frac{Y-y_0}{f'|_{y_0}} = \frac{Z-z_0}{f'|_{z_0}} \Rightarrow \frac{X-1}{-8} = \frac{Y-0}{-6} = \frac{Z-2}{-16}$$

حيث:

X, Y, Z احداثيات نقطة متحولة على المستقيم الناظم.

---

٢) عين نوع السطح S

إن معادلة السطح المعطاة هي من الشكل :

$$F(x, y, z) + 2P(x, y, z) + d = 0$$

لنحولها إلى الشكل :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$$

نعوض :

$$2x^2 - 3y^2 - 4z^2 - 12x - 6y - 27 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 12x - 3y^2 - 6y - 4z^2 - 27 = 0$$

$$\Rightarrow 2(x^2 - 6x) - 3(y^2 + 2y) - 4z^2 = 27$$

بالإتمام الى المربع الكامل :

$$\Rightarrow 2(x^2-6x+9)-3(y^2+2y+1)-4z^2=27+18-3$$

$$\Rightarrow 2(x-3)^2-3(y+1)^2-4z^2=42 \qquad (*)$$

ومن ثم نجعل مبدأ الاحداثيات هو مركز تناظر وذلك بواسطة الانسحاب من خلال دساتير الانسحاب نجد :

$$X=x+3 \quad ,Y=y+1 \quad ,Z=z$$

نعوض دساتير الانسحاب بالعلاقة $(*)$ نجد :

$$2x^2-3y^2-4z^2=42$$

بالمطابقة مع الشكل:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+D=0$$

نجد أن :

$$A=2 \quad ,B=-3 \quad ,C=-4 \quad ,D=-42$$

وبتقسيم طرفي المعادلة على $(-D)$ يكون :

$$\frac{X^2}{21}-\frac{Y^2}{14}-\frac{\frac{Z^2}{42}}{4}=-1$$

حيث أن :

$$a^2=21 \quad ,b^2=14 \quad , \qquad c^2=4$$

وهي عبارة عن معادلة قطع زائد ذو فرعين .

---

٣) أوجد مقطع السطح S مع المستوي xoy .

الحـــل :

لإيجاد مقطع السطح S مع المستوي xoy نفرض أن $z = 0$

بالتعويض في المعادلة نجد أن :

$$-\frac{(x-3)^2}{21} + \frac{(y+1)^2}{14} + \frac{\frac{Z^2}{42}}{4} = -1$$

$$-\frac{(x-3)^2}{21} + \frac{(y+1)^2}{14} = -1$$

نضرب بـ (-1) نجد :

$$\frac{(x-3)^2}{21} - \frac{(y+1)^2}{14} = 1$$

معادلة قطع ناقص مركزه $(3, -1)$

٤) أوجد معادلة المخروط الموجه للسطح S .

إن معادلة المخروط الموجه تنتج من معادلة السطح S نفسها وذلك بإهمال الحدود الخطية والحد الثابت ومن أجل ذلك نجد أن المعادلة المطلوبة هي من الشكل :

$$S' = 2x^2 - 3y^2 - 4z^2 = 0$$

--- انتهى الحــل ---

السؤال الأول:

لدينا المستقيمان D_1, D_2حيث :

$$D^1:\begin{cases} Q_1 \equiv 2x + y - 1 = 0 \\ Q_2 \equiv y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

$$D^2:\begin{cases} Q_3 \equiv x - y + z = 0 \\ Q_4 \equiv x - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

١.أوجد معادلتي المستقيم القاطع D_1, D_2 والموازي للمتجه $\vec{v}(-2,2,1)$ للمستقيمين

الحـــل:

أولاً نوجد حزمة المستقيمات المارة بالمستقيم D_1، ونختار من هذه الحزمة مستوياً يوازي $\vec{v}$. ولدينا معادلة حزمة المستويات المارة بالمستقيم D_1 تعطى بالشكل:

$$Q_\lambda \equiv Q_1 + \lambda Q_2 = 0 \Longrightarrow Q_\lambda \equiv (2x + y - 1) + \lambda(y + z - 4) = 0$$

بالفك و الترتيب نجد:

$$Q_\lambda \equiv 2x + (1 + \lambda)y + \lambda z + (-1 - \lambda 4) = 0$$

ومنه نجد أن ناظم الحزمة هو:

$$\overrightarrow{N_\lambda}(2,1 + \lambda, \lambda)$$

ونختار من هذه الحزمة مستوياً يوازي الشعاع $\vec{v}$ ، أي نبحث عن قيمة لـλ بحيث يكون ناظم الحزمة $\overrightarrow{N_\lambda}$ يعامد الشعاع $\vec{v}$، ومنه نكتب:

$$\overrightarrow{N_\lambda} \perp \vec{v} \iff \overrightarrow{N_\lambda}.\vec{v} = 0 \iff (2,1 + \lambda, \lambda).(-2,2,1) = 0$$

$$\Longrightarrow 2(-2) + 2(1 + \lambda) + 1(\lambda) = 0 \Longrightarrow -4 + 2 + 2\lambda + \lambda = 0$$

نجد أن $\lambda = \frac{2}{3}$ نعوض قيمة λ بمعادلة الحزمة Q_λ نجد أن:

$$Q_{\lambda=\frac{2}{3}} \equiv 2x + \left(1+\frac{2}{3}\right)y + \frac{2}{3}z + \left(-1-4\left(\frac{2}{3}\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow Q_\lambda \equiv 2x + \frac{5}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{11}{3} = 0 \Rightarrow$$ نضرب الطرفين بـ3

ومنه يكون :

$$Q_\lambda \equiv 6x + 5y + 2z - 11 = 0 \ldots . (1)$$

ثانيا:نوجد حزمة المستقيمات المارة بالمستقيم D_2، ونختار من هذه الحزمة مستوياً يوازي $\vec{v}$. ولدينا معادلة حزمة المستويات المارة بالمستقيم D_2 تعطى بالشكل:

$$Q_\mu \equiv Q_3 + \mu Q_4 = 0 \Rightarrow Q_\mu \equiv (x-y+z) + \mu(x-2z-2) = 0$$

بالفك والترتيب نجد:

$$Q_\mu \equiv (1+\mu)x - y + (1-2\mu)z - 2\mu = 0$$

ومنه نجد أن ناظم الحزمة هو:

$$\overrightarrow{N_\mu}(1+\mu, -1, 1-2\mu)$$

ونختار من هذه الحزمة مستوياً يوازي الشعاع $\vec{v}$ ، أي نبحث عن قيمة لـλ بحيث يكون ناظم الحزمة $\overrightarrow{N_\mu}$ يعامد الشعاع $\vec{v}$، ومنه نكتب:

$$\overrightarrow{N_\mu} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{N_\mu}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow (1+\mu, -1, 1-2\mu).(-2,2,1) = 0$$

$$\Rightarrow -2(1+\mu) + 2(-1) + 1(1-2\mu) = 0$$
$$\Rightarrow -2 - 2\mu - 2 + 1 - 2\mu = 0$$

نجد أن $\mu = -\frac{3}{4}$ نعوض قيمة μ بمعادلة الحزمة Q_μ نجد أن:

$$Q_{\mu=-\frac{3}{4}} \equiv \left(1-\frac{3}{4}\right)x - y + (1-2(-\frac{3}{4})z + \left(\frac{6}{4}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow Q_\mu \equiv \frac{1}{4}x - y + \frac{10}{4}z + \frac{6}{4} = 0 \Longrightarrow 4$$ نضرب الطرفين بـ

ومنه يكون :

$$Q_\mu \equiv x - 4y + 10z + 6 = 0 \ldots . 2$$

ثالثاً: إن معادلتي المستقيم القاطع للمستقيمين D_1, D_2 والموازي للمتجه $\vec{v}(-2,2,1)$ يتعين بتقاطع المستويين Q_μ, Q_λ المعينين بالمعادلتين 1 و 2 ومنه وبفرض أن المستقيم المطلوب هو D نجد أن معادلتيه هما:

$$D: \begin{cases} Q_\lambda \equiv 6x + 5y + 2z - 11 = 0 \\ Q_\mu \equiv x - 4y + 10z + 6 = 0 \end{cases}$$

٢.أوجد معادلة المستوي المنصف الخارجي لزاوية المستويين Q_3, Q_4

الحــل:

بما أن مجموعة نقاط المستوي المنصف متساوية البعد عن كلا المستويين Q_3, Q_4 فإن العلاقة التالية محققة:

$$\frac{|Q_3(x,y,z)|}{\sqrt{p_3^2+q_3^2+r_3^2}} = \frac{|Q_4(x,y,z)|}{\sqrt{p_4^2+q_4^2+r_4^2}} \Longrightarrow \frac{|x-y+z|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|x-2z-2|}{\sqrt{1+0+4}}$$

بحيث أن:

$$\Leftarrow \begin{cases} Q_3 \text{ هو ناظم المستوي } \overrightarrow{N_3}(p_3,q_3,r_3) = (1,-1,1) \\ Q_4 \text{ هو ناظم المستوي } \overrightarrow{N_4}(p_4,q_4,r_4) = (1,0,-2) \end{cases}$$

$$\frac{|x-y+z|}{\sqrt{3}} = \frac{|x-2z-2|}{\sqrt{5}} \Longrightarrow \sqrt{5}(x-y+z) = \mp\sqrt{3}(x-2z-2) \quad \ldots *$$

ينتج لدينا من العلاقة السابقة * معادلتين الأولى موافقة للإشارة (+) والثانية موافقة للإشارة (-) وهما معادلتي المنصفين الداخلي والخارجي وللتمييز بينهما نأخذ الجداء الداخلي لناظمي المستويين Q_3, Q_4 ثم نناقش إشارة ناتج الجداء ومنه يكون:

$$N_3, N_4 = (1,-1,1).(1,0,-2) = 1(1) + 0(-1) + 1(-2) = -1 < 0$$

وبالتالي معادلة المنصف الخارجي هي المعادلة الموافقة للإشارة (-) والناتجة عن فك العلاقة التالية :

$$\sqrt{5}(x - y + z) = -\sqrt{3}(x - 2z - 2)$$

$$\Longrightarrow (\sqrt{5} + \sqrt{3})x + (-\sqrt{5})y + (\sqrt{5} - 2\sqrt{3})z - 2\sqrt{3} = 0$$

وهي معادلة المنصف الخارجي لزاوية المستويين Q_3, Q_4

٣.أكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم D_2 :

أولاً: نعين نقطة تنتمي الى المستقيم D_2 الذي هو الفصل المشترك لتقاطع المستويين Q_3, Q_4 ويتم ذلك بـ:

حل جملة معادلتي المستويين حلاً مشتركاً وهي جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل ونكمل حل جملة معادلتين بمجهولين ولذلك نفرض: $z = 0$ فيكون:

$$x = 2, y = 2 \Longleftarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$$

وبالتالي تكون النقطة $M_0(2,2,0)$ تنتمي للمستقيم D_2

ثانياً: نوجد منحى المستقيم D_2 بحيث نجد أن المستقيم D_2 يعامد ناظمي المستويين Q_3, Q_4 أي أنه يتعين من الجداء الخارجي لـ $\overrightarrow{N_3}, \overrightarrow{N_4}$

$$\vec{A} = \overrightarrow{N_3} \wedge \overrightarrow{N_4} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k}$$

أي أن المنحى هو $\vec{A}(2,3,1)$

ثالثاً: أصبحنا نريد إيجاد المعادلات الوسيطية للمستقيم D_2 الذي يمر بالنقطة M_0 ويوازي المنحى $\vec{A}$ عندئذٍ:

بفرض $M(x,y,z)$ نقطة متحولة على المستقيم D_2 بأنه وفي جميع أوضاع النقطة M تتحقق العلاقة التالية:

$$\overrightarrow{M_0M} \backslash\backslash \vec{A} \Leftrightarrow (x-2, y-2, z) = \lambda(2,3,1)$$

$$\Longrightarrow \begin{matrix} x-2=2\lambda \\ y-2=3\lambda \\ Z=\lambda \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} x=2\lambda+2 \\ y=3\lambda+2 \\ Z=\lambda \end{cases}$$

وهي المعادلات الوسيطية للمستقيم D_2

٤.أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $M_0(1,2,3)$ ويعامد المستويين Q_1, Q_2

بما أن المستوي المطلوب يعامد المستويين Q_1, Q_2 فهو يوازي ناظميهما أي أن ناظم المستوي المطلوب يتعين بالجداء الخارجي لناظمي المستويين Q_1, Q_2 حيث أن:

$\overrightarrow{N_1}(2,1,0)$ ناظم المستوي Q_1

$\overrightarrow{N_2}(0,1,1)$ ناظم المستوي Q_2

ولنفرض $\vec{N}$ ناظم المستوي المطلوب عندئذٍ وفي جميع أوضاع النقطة M تتحقق العلاقة التالية:

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}.\vec{N} = 0 \Leftrightarrow (x-1, y-2, z-3).(1,-2,2) = 0$$

$$\Rightarrow 1(x-1) - 2(y-2) + 2(z-3) = 0$$

$$\Rightarrow \ x - 1 - 2y + 4 + 2z - 6 = 0 \ \Rightarrow x - 2y + 2z - 3 = 0$$

وهي معادلة المستوي المطلوب

٥.أوجد نظيرة النقطة $M_1(1,0,1)$ بالنسبة للمستوي Q_3

الحــل:

بفرض $M_2(x_2, y_2, z_2)$ نقطة نظيرة لـM_1 بالنسبة للمستوي Q_3 ومنه نجد أن $\overrightarrow{N_3} \backslash\backslash \overrightarrow{M_1M_2}$ ومنه تكون العلاقة التالية محققة:

$$\frac{x_2 - x_1}{P_3} = \frac{y_2 - y_1}{q_3} = \frac{z_2 - z_1}{r_3} \Rightarrow \frac{x_2 - 1}{1} = \frac{y_2 - 0}{-1} = \frac{z_2 - 1}{1} = \lambda$$

لنكتب إحداثيات النقطة M_2 بالشكل الوسيطي:

$$x_2 = \lambda + 1 , y_2 = -\lambda , z_2 = \lambda + 1 \quad \ldots . . I$$

بما أن M_1, M_2 متناظرتان بالنسبة للمستوي Q_3 فإنه يقطع القطعة المستقيمة $\overrightarrow{M_1, M_2}$ في منتصفها أي أن إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $\overrightarrow{M_1, M_2}$ تحقق معادلة المستوي Q_3

ولتكن هذه النقطة هي:

$M(\frac{x_2+1}{2}, \frac{y_2+0}{2}, \frac{z_2+1}{2})$ لنعوض بمعادلة المستوي Q_3 نجد أن:

$$Q_3 \equiv \left(\frac{x_2+1}{2}\right) - \left(\frac{y_2+0}{2}\right) + \left(\frac{z_2+1}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$ نضرب الطرفين بـ2

$$x_2 + 1 - y_2 + z_2 + 1 = 0 \Rightarrow x_2 - y_2 + z_2 + 2 = 0 \ldots . 1$$

نعوض جملة المعادلات الوسيطية I بالمعادلة ① لنوجد قيمة الوسيط λ فيكون :

$$\lambda+1-(-\lambda)+(\lambda+1)+2=0 \Longrightarrow 3\lambda+4=0 \Longrightarrow \lambda=-\frac{4}{3}$$

نعوض قيمة الوسيط λ بالمعادلة I نجد أن:

$$\begin{cases} x_2=-\frac{1}{3} \\ y_2=\frac{4}{3} \\ z_3=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

وبالتالي احداثيات النقطة M_2 نظيرة M_1 بالنسبة للمستوي Q_3 هي:

$$M_2(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3})$$

السؤال الثاني:

١.عين الوسيط λ حتى تتعامد الكرتان:

$$\boldsymbol{S_1(x,y,z)\equiv 3x^2+3y^2+3z^2-\frac{3}{2}\lambda y+6z=0}$$

$$\boldsymbol{S_2(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2+\lambda x-\lambda y-4z+\frac{\lambda}{2}=0}$$

الحــل:

نقسم معادلة الكرة S_1 على ٣ لتصح أمثال الحدود المربعة تساوي الواحد أي لتؤول الى الشكل S_1^* فتصبح المعادلة من الشكل:

$$S_1^*(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2-\frac{\lambda}{2}y+2z=0$$

لتتعامد الكرتان S_1^*,S_2 يجب أن يتحقق الشرط التالي:

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = \frac{d_1 + d_2}{2} \dots *$$

حيث:

a_1, b_1, c_1 احداثيات مركز الكرة S_1^* و d_1 الحد الثابت

a_2, b_2, c_2 احداثيات مركز الكرة S_2^* و d_2 الحد الثابت

لنوجد المقادير السابقة وذلك بالمقارنة مع الصيغة العامة لمعادلة الكرة:

$$-2a_1 = 0 \Longrightarrow a_1 = 0 \,\&\, -2a_2 = \lambda \Longrightarrow a_2 = -\frac{\lambda}{2}$$

$$-2b_1 = -\frac{\lambda}{2} \Longrightarrow b_1 = \frac{\lambda}{4} \,\&\, -2b_2 = -\lambda \Longrightarrow b_2 = \frac{\lambda}{2}$$

$$-2c_1 = 2 \Longrightarrow c_1 = -1 \,\&\, -2c_2 = -4 \Longrightarrow c_2 = +2$$

ولدينا أيضاً:

$$d_1 = 0\,, d_2 = \frac{\lambda}{2}$$

نعوض هذه القيم بالمعادلة نجد:

$$0\left(-\frac{\lambda}{2}\right) + \left(\frac{\lambda}{4}\right)\left(\frac{\lambda}{2}\right) + 2(-1) = \frac{0 + \frac{\lambda}{2}}{2} \Longrightarrow \frac{\lambda^2}{8} - 2 = \frac{\lambda}{4}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{8}\lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 16 = 0$$

بحل المعادلة السابقة ينتج لدينا قيمة الوسيط λ وهي معادلة من الدرجة الثانية مميزها Δ يساوي:

$$\Delta = 68 > 0 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

وبالتالي يوجد قيمتان لـλ هما:

$$\lambda_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-2\sqrt{17}}{2} = 1-\sqrt{17}$$

$$\lambda_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+2\sqrt{17}}{2} = 1+\sqrt{17} =$$

2.اذا كانت $\lambda = 2$ يصبح لدينا:

$$\boldsymbol{S_1^* \equiv x^2 + y^2 + z^2 - y + 2z = 0}$$

$$\boldsymbol{S_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z + 1 = 0}$$

المطلوب:

أ) أوجد معادلة المستوي الأساسي للكرتين S_1^*, S_2

الحــل:

إن معادلة المستوي الأساسي للكرتين S_1^*, S_2 هي من الشكل:

$$S_1^* - S_2 = 0$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - y + 2z) - (x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z + 1) = 0$$

$$-2x + y + 6z - 1 = 0$$

وهي ومعادلة المستوي الأساسي للكرتين

ب) أثبت أن المستوي $Q(x,y,z) \equiv 2x + y + 2z + 3 = 0$ يقطع الكرة S_2 ثم حدد إحداثيات مركز دائرة التقاطع ونصف قطرها.

الحــل:

أولاً نوجد مركز الكرة S_2 وذلك مقارنةً مع الصيغة العامة لمعادلة الكرة:

$$\begin{cases}-2a_2 = 2\\ -2b_2 = -2\\ -2c_2 = -4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_2 = -1\\ b_2 = 1\\ c_2 = 2\end{cases} \Rightarrow C_2(-1,1,2)$$ وهو مركز الكرة S_2

ثانياً: نحسب نصف قطر الكرة S_2 وذلك من العلاقة:

$$R = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - d} = \sqrt{1+1+4-1} = \sqrt{5}$$

ثالثاً: نحسب بعد مركز الكرة عن المستوي Q وفق العلاقة:

$\vec{N}(p,q,r)$ ناظم المستوي Q

$$\delta = \frac{|pa_2 + qb_2 + rc_2 + h|}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \frac{|-2+1+4+3|}{\sqrt{4+1+4}} = 2$$

رابعاً نلاحظ أن:

$\delta = 2 < R = \sqrt{5}$ وبالتالي المستوي Q قاطع للكرة S_2 وإن نصف قطر دائرة التقاطع يعطى بالعلاقة:

$$r^2 = R^2 - \delta^2 \Rightarrow r^2 = 5 - 4 = 1 \Rightarrow r = 1$$

لنوجد إحداثيات مركز دائرة التقاطع:

في البداية لنوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من مركز الكرة S_2 والعامودي على المستوي Q :

بما أن المستقيم المطلوب مار من C_2 مركز الكرة S_2 ويعامد المستوي Q

وبالتالي بأنه يوازي ناظم هذا المستوي $\vec{N}$ عندئذٍ وبفرض أن $M(x,y,z)$ نقطة متحولة على المستقيم المطلوب بأنه وفي جميع أوضاع النقطة M تتحقق العلاقة التالية:

$$C_2M \backslash\backslash N \Leftrightarrow C_2M = \lambda N \Leftrightarrow (x+1, y-1, z-2) = \lambda(2,1,2)$$

$$\begin{cases} x+1 = 2\lambda \\ y-1 = \lambda \\ z-2 = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda - 1 \\ y = \lambda + 1 \quad \dots (I) \\ z = 2\lambda + 2 \end{cases}$$

و هي المعادلات الوسيطية للمستقيم المطلوب

نعوض المعادلات الوسيطية (I) بمعادلة المستوي Q لإيجاد قيمة الوسيط λ

$$Q \equiv 2(2\lambda - 1) + (\lambda + 1) + 2(2\lambda + 2) + 3 = 0$$
$$\Rightarrow 4\lambda - 2 + \lambda + 1 + 4\lambda + 4 + 3 = 0 \Rightarrow 9\lambda + 6 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$$

نعوض قيمة الوسيط λ بالمعادلات الوسيطية (I) فنحصل على إحداثيات مركز دائر التقاطع و هي:

$$\begin{cases} x = 2\left(-\frac{2}{3}\right) - 1 \\ y = -\frac{2}{3} + 1 \\ z = 2\left(-\frac{2}{3}\right) + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

السؤال الثالث:

١.أوجد معادلتي المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم للمنحني C المعين بالمعادلات الوسيطية التالية:

$$\boldsymbol{x = 3\cos t \ , y = 2\sin 2t \ , z = 2t + 1}$$

الموافقة لـ $t = 0$

الحــل:

<u>أولاً لنوجد احداثيات النقطة الموافقة لقيم الوسيط $t = 0$ بالتعويض:</u>

$$\begin{cases} x = 3\cos 0 \\ y = 2\sin 2(0) \\ z = 2(0) + 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Longrightarrow (3,0,1)$$

<u>ثانياً: لنوجد منحى المستقيم المماس للمنحني C المعطى بالشكل:</u>

$$\vec{T}(x'_{t=0}\ , y'_{t=0}\ , z'_{t=0})$$

$$\begin{cases} x' = -3\sin t \\ y' = 4\cos 2t \\ z' = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x'_{t=0} = 0 \\ y'_{t=0} = 4 \\ z'_{t=0} = 2 \end{cases}$$

وبالتالي يكون منحى المستقيم المماس هو: $\vec{T}(0\ ,4\ ,2)$

ولكن لدينا: معادلتي المستقيم المماس للمنحني C من الشكل:

X, Y, Z احداثيات نقطة متحولة على المستقيم: $\frac{X-x_0}{x'_t} = \frac{Y-y_0}{y'_0} = \frac{Z-z'_0}{z'_0}$

بالتعويض نجد:

وهي معادلتي المستقيم المماس للمنحني $C \Longleftarrow \frac{X-3}{0} = \frac{Y-0}{4} = \frac{Z-1}{2}$

ولدينا معادلة المستوي الناظم من الشكل:

$$x_t'(X-x_0)+y_t'(Y-y_0)+z_t'(Z-z_0)=0$$

بحيث:

X, Y, Z احداثيات نقطة متحولة على المستوي الناظم،

بالتعويض نجد:

$$0(X-3)+4(Y-0)+2(Z-1)=0$$

$4Y+2Z-2=0 \Longrightarrow$ وهي معادلة المستوي الناظم للمنحني

٢.أوجد مركز تناظر السطح المعين بالمعادلة التالية:

الحــل:

لنوجد المشتقات الجزئية لمعادلة السطح بالنسبة للمجاهيل x, y, z

فنحصل على جملة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل:

$$f_x'=2x+2y-2z=0$$

$$f_y'=2x-2y-6=0$$

$$f_z'=-2x+4z+8=0$$

وهي جملة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل تشكل ثلاث مستويات وبحل هذه الجملة نحصل على مركز تناظر السطح، ولحلها نأخذ محدد الأمثال Δ فهو:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}=2(-8-0)-2(8-0)-2(0-4)=3\neq 0$$

وبالتالي:

للجملة حل وحيد أي للسطح مركز تناظر وحيد لنوجده

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -6 & -2 & 0 \\ 8 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16, \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & -6 & 0 \\ -2 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -56, \Delta_z = -40$$

$$\Longrightarrow x = \frac{\Delta_x}{x} = \frac{16}{3}, y = \frac{\Delta_y}{y} = -\frac{56}{3}, z = \frac{\Delta_z}{z} = -\frac{40}{3}$$

وبالتالي مركز تناظر السطح هو النقطة $\left(\frac{16}{3}, -\frac{56}{3}, -\frac{40}{3}\right)$

--- انتهى الحــل ---

أسئلة مقرر الهندسة التحليلية الفصل الثاني دورة 2014

السؤال الأول :

ليكن لدينا المستويان Q_1, Q_2 المعينان بالمعادلتين التاليتين :

$$Q_1 = x + 2y + 2Z + 6 = 0$$

$$Q_2 = 2x + y + 2Z - 1 = 0$$

والكرتان S_1, S_2 المعينتان بالمعادلتين :

$$S_1^* = x^2 + y^2 + Z^2 - 4 = 0$$

$$S_2^* = x^2 + y^2 + Z^2 - 2x + 3y - Z - 2 = 0$$

المطلوب :

١) أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية المستويين Q_1, Q_2 .

٢) أوجد معادلة مستوي يمر بالفصل المشترك للمستويين ويوازي المنحنى $\vec{v}(1,2,3)$.

٣) اكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم المعين بتقاطع المستويين Q_1, Q_2 .

٤) أوجد نظير النقطة $M_1(1,0,1)$ بالنسبة للمستوي Q_2

٥) احسب قوة النقطة $M_0(2,3,-1)$ بالنسبة للكرة S_2 ثم عين وضع هذه النقطة بالنسبة لها .

٦) أثبت أن المستوي Q_1 يمس الكرة S_1 ثم عين احداثيات نقطة التماس .

٧) أوجد معادلة الكرة التي تمر بالدائرة C المعينة بالمعادلتين :

$$\begin{cases} S_1^* = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \\ Q_1 = x + 2y + 2z + 6 = 0 \end{cases}$$

والتي تمر أيضا بالنقطة $A(2,3,-1)$

السؤال الثاني :

١- أوجد معادلتي المستقيم الناظم ومعادلة المستوي المماس للسطح S في النقطة $M_0(1,1,0)$

٢- عين مركز تناظر السطح S .

--- انتهت الأسئلة ---

حل دورة الفصل الثاني 2014

السؤال الأول :

ليكن لدينا المستويان Q_1, Q_2 المعينان بالمعادلتين التاليتين :

$$Q_1 = x + 2y + 2Z + 6 = 0$$

$$Q_2 = 2x + y + 2Z - 1 = 0$$

والكرتان S_1, S_2 المعينتان بالمعادلتين

$$S_1^* = x^2 + y^2 + Z^2 - 4 = 0$$

$$S_2^* = x^2 + y^2 + Z^2 - 2x + 3y - Z - 2 = 0$$

المطلوب :

١) أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية المستويين Q_1, Q_2

الحـــل :

بما أن مجموعة نقاط المستوي المنصف متساوية البعد عن المستويين :

$$\frac{|Q_1(x, y, z)|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}} = \frac{|Q_2(x, y, z)|}{\sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}$$

$$\frac{|x + 2y + 2Z + 6|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|2x + y + 2Z - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 4}}$$

ومنه :

$$|x + 2y + 2Z + 6| = |2x + y + 2Z - 1|$$

$$\Longrightarrow (x+2y+2Z+6)=\pm(2x+y+2Z-1)$$

وبالتالي معادلة المستوي الموافق للإشارة $(+)$ هي :

$$(x+2y+2Z+6)=(2x+y+2Z-1)$$

$$\Longrightarrow -x+y+7=0 \quad (1)$$

ومعادلة المستوي الموافق للإشارة $(-)$ هي :

$$(x+2y+2Z+6)=-(2x+y+2Z-1)$$

$$\Longrightarrow 3x+3y+4z+5=0 \quad (2)$$

ومن أجل تحديد معادلة المستوي المنصف الداخلي والخارجي نقوم بأخذ الجداء الداخلي لكل من ناظمي المستويين Q_1, Q_2 بحيث :

$\overrightarrow{N_1}(1,2,2)$ ناظم في المستوي Q_1 و $\overrightarrow{N_2}(2,1,2)$ ناظم في المستوي Q_2

ومنه :

$$\overrightarrow{N_1}.\overrightarrow{N_2}=2(1)+1(2)+2(2)=2+2+4=8$$

وبالتالي $\overrightarrow{N_1}.\overrightarrow{N_2}=8>0$

أي أن معادلة المستوي المنصف الداخلي هي الموافقة للإشارة $(-)$ وهي المعادلة (2)

$$3x+3y+4z+5$$

والمنصف الخارجي هي الموافقة للإشارة $(+)$ وهي المعادلة (1)

$$-x+y+7=0$$

---

٢) أوجد معادلة مستوي يمر بالفصل المشترك للمستويين ويوازي المنحنى $\vec{v}(1,2,3)$.

الحـــل :

أولا نوجد معادلة حزمة المستويات المارة بالفصل المشترك للمستويين Q_1, Q_2 وهي من الشكل :

$$Q(\lambda) = Q_1(x, y, z) + \lambda . Q_2(x, y, z)$$

$$Q(\lambda) = x + 2y + 2Z + 6 + \lambda(2x + y + 2Z - 1) = 0$$

$$Q(\lambda) = x + 2y + 2Z + 6 + \lambda 2x + \lambda y + \lambda 2Z - \lambda = 0$$

$$Q(\lambda) = x + 2\lambda x + 2y + \lambda y + 2z + 2\lambda z + 6 - \lambda = 0$$

$$Q(\lambda) = (1 + 2\lambda)x + (2 + \lambda)y + (2 + 2\lambda)z + 6 - \lambda = 0$$

ومنه ناظم الحزمة يكون :

$$\overrightarrow{N_\lambda}(1 + 2\lambda \, , 2 + \lambda \, , 2 + 2\lambda)$$

ثانيا نوجد قيمة الوسيط λ باتباع ما يلي :

بما أن المستوي المطلوب يمر بالفصل المشترك للمستويين Q_1, Q_2 ويوازي المنحنى $\vec{v}$ فإن:

$$\overrightarrow{N_\lambda} \perp \vec{v}$$

ومنه :

$$\overrightarrow{N_\lambda} . \vec{v} = 0 \iff (1 + 2\lambda \, , 2 + \lambda \, , 2 + 2\lambda)(1,2,3) = 0$$

وبالتالي :

$$\overrightarrow{N_\lambda} . \vec{v} = 1(1 + 2\lambda) + 2(2 + \lambda) + 3(2 + 2\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + 2\lambda + 4 + 2\lambda + 6 + 6\lambda = 0$$

$$\Rightarrow 10\lambda = -11 \ \Rightarrow \lambda = \frac{-11}{10}$$

ثالثا نعوض قيمة الوسيط λ بمعادلة الحزمة فنحصل على معادلة المستوي المطلوب :

$$Q\left(\frac{-11}{10}\right) = (1 + 2\frac{-11}{10})x + (2 + \frac{-11}{10})y + (2 + 2\frac{-11}{10})z + 6 - \frac{-11}{10} = 0$$

$$Q\left(\frac{-11}{10}\right) = (\frac{-6}{5})x + (\frac{9}{10})y + (\frac{-1}{5})z + \frac{71}{10} = 0$$

نضرب طرفي المعادلة السابقة بـ 10 فنحصل على معادلة المستوي المطلوب :

$$Q\left(\frac{-11}{10}\right) = -12x + 9y - 2z + 71 = 0$$

---

٣) اكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم المعين بتقاطع المستويين Q_1, Q_2 .

الحـــل :

أو لا نعين نقطة تنتمي للفصل المشترك للمستويين وذلك بحل جملة معادلتي المستويين

Q_1, Q_2 حل مشترك :

نجد أن جملة المعادلات هي جملة بثلاث مجاهيل لمعادلتين ولحل مثل هذه الجملة نقوم بفرض قيمة اختيارية لأحد المجاهيل الثلاث ومن ثم إيجاد قيمة المجهولين المتبقيين من المعادلتين الناتجتين على الشكل التالي :

نفرض $z = 0$ نحصل على المعادلتين :

$$\begin{cases} x + 2y = -6 & (1) \\ 2x + y = 1 & (2) \end{cases}$$

من المعادلة (2) : $y = 1 - 2x$ نعوض بـ (1) نجد :

$$x + 2(1 - 2x) = -6$$

ومنه $x = \frac{8}{3}$ وبالتالي $y = -\frac{13}{3}$

وبذلك تعين لدينا نقطة تنتمي للفصل المشترك للمستويين Q_1, Q_2 وهي :

$$M_0\left(\frac{8}{3}, -\frac{13}{3}, 0\right)$$

ثانيا نعين منحى المستقيم المطلوب ونحصل عليه من الجداء الخارجي لناظمي المستويين حيث:

$\overrightarrow{N_1}(1,2,2)$ ناظم في المستوي Q_1

$\overrightarrow{N_2}(2,1,2)$ ناظم في المستوي Q_2

وبالتالي يكون منحنى المستقيم:

$$\vec{v} = \overrightarrow{N_1} \wedge \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (4-2)\vec{i} - (2-4)\vec{j} + (1-4)\vec{k}$$

إذا المنحنى هو :

$$\vec{v}(2,2,-3)$$

وبالتالي ردت هذه المسألة إلى إيجاد المعادلات الوسيطية لمستقيم يمر من نقطة معلومة

$M_0\left(\frac{8}{3}, -\frac{13}{3}, 0\right)$ ويوازي منحنى معلوم $\vec{v}(2,2,-3)$

ثالثا نفرض $M(x,y,z)$ نقطة متحولة على المستقيم المطلوب عندئذ تتحقق لدينا العلاقة التالية:

$$\overrightarrow{M_0M} // \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{v}$$

$$\left(x-\frac{8}{3}\right)\vec{i}-\left(y+\frac{13}{3}\right)\vec{j}+(Z-0)\vec{k}=\lambda\left((2)\vec{i}+(2)\vec{j}-3\vec{k}\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{matrix} x-\frac{8}{3}=2\lambda \\ y+\frac{13}{3}=2\lambda \\ Z=-3\lambda \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} x=2\lambda-\frac{8}{3} \\ y=2\lambda-\frac{13}{3} \\ Z=-3\lambda \end{cases}$$

وهي المعادلات الوسيطية للمستقيم الطلوب .

---

٤) أوجد نظير النقطة $M_1(1,0,1)$ بالنسبة للمستوي Q_2

الحــل :

أولا نفرض $M_2(x_2,y_2,z_2)$ نقطة نظيرة لـ M_1 بالنسبة للمستوي Q_2 إذا كان هذا المستوي يعامد القطعة المستقيمة $\overline{M_1M_2}$ في منتصفها .

وبالتالي فإن $\overrightarrow{M_1M_2}\ //\ \overrightarrow{NQ_2}$ ومنه تنتج العلاقة التالية :

$$\frac{x_2-x_1}{P_2}=\frac{y_2-y_1}{q_2}=\frac{z_2-z_1}{r_2}\Longrightarrow\frac{x_2-1}{2}=\frac{y_2-0}{1}=\frac{z_2-1}{2}\quad(1)$$

ثانيا نفرض M_0 منتصف القطعة المستقيمة $\overline{M_1M_2}$ وبالتالي $M_0\in Q_2$ أي تحقق معادلة المستوي Q_2 بحيث :

$$M_0\left(\frac{x_2+1}{2},\ \frac{y_2+0}{2},\ \frac{z_2+1}{2}\right)$$

ومنه :

$$Q_2=2\left(\frac{x_2+1}{2}\right)+\left(\frac{y_2}{2}\right)+2\left(\frac{z_2+1}{2}\right)-1=0$$

وبالتالي بضرب طرفي المعادلة السابقة بـ 2 نجد :

$$2x_2+2+y_2+2z_2+2-1=0\Longrightarrow 2x_2+y_2+2z_2+3=0\quad(2)$$

ثالثا ينبج لدينا من العلاقتين السابقتين ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل بحل هذه المعادلات نحصل على احداثيات النقطة M_2

من العلاقة (1) ينتج لدينا معادلتين :

من النسبة B, A نحصل على المعادلة : $(3) \quad x_2 - 2y_2 - 1 = 0$

من النسبة C, B نحصل على المعادلة : $(4) \quad z_2 - 2y_2 - 1 = 0$

نحل جملة المعادلات $(2), (3), (4)$:

من المعادلتين $(3), (4)$ نجد أن : $x_2 = z_2 = 2y_2 + 1$

نعوض بالمعادلة (2) نجد :

$$2(2y_2 + 1) + y_2 + 2(2y_2 + 1) + 3 = 0 \implies y_2 = -\frac{7}{9}$$

ومنه نجد أن :

$$x_2 = z_2 = -\frac{5}{9}$$

وبالتالي احداثيات النقطة M_2 نظيرة M_1 بالنسبة للمستوي Q_2 هي :

$$M_2\left(-\frac{5}{9}, -\frac{7}{9}, -\frac{5}{9}\right)$$

---

٥) احسب قوة النقطة $M_0(2, 3, -1)$ بالنسبة للكرة S_2 ثم عين وضع هذه النقطة بالنسبة لها .

الحــل :

لحساب قوة نقطة بالنسبة لكرة نعوض احداثيات هذه النقطة بمعادلة الكرة ولذلك نعوض احداثيات النقطة M_0 بمعادلة الكرة S_2 نجد أن :

$$S_2^* = (2)^2 + (3)^2 + (-1)^2 - 2(2) + 3(3) - (-1) - 2$$

$$= 4 + 9 + 1 - 4 + 9 + 1 = 20$$

نلاحظ أن قوة النقطة M_0 بالنسبة للكرة S_2 هي $20 > 0$ وبالتالي إن النقطة M_0 تقع خارج الكرة S_2 .

---

٦) أثبت أن المستوي Q_1 يمس الكرة S_1 ثم عين احداثيات نقطة التماس .

الحــل :

أولا نوجد مركز الكرة S_1 من الصيغة العامة للكرة نجد ان مركزها هو مبدأ الاحداثيات أي هو النقطة $C(0,0,0)$.

ثانيا نوجد نصف قطر الكرة S_1 :

لحساب نصف القطر لدينا العلاقة التالية :

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{0 + 0 + 0 + 4} = 2$$

ثالثا نوجد بعد مركز الكرة عن المستوي من العلاقة :

$$\delta = \frac{|\mathrm{p}_1 a + q_1 b + r_1 c + h_1|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}} = \frac{|0 + 0 + 0 + 6|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$$

نلاحظ أن :

$2 = R = \delta = 2$ وبالتالي المستوي Q_1 هو مستوي مماس للكرة S_1 .

رابعا نوجد احداثيات نقطة التماس :

نقوم بإيجاد المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من مركز الكرة C والعمودي على المستوي Q_1. نفرض $M(x,y,z)$ نقطة متحولة على المستقيم المطلوب وبما أن هذا المستقيم بعامد المستوي Q_1 ويمر من مركز الكرة النقطة C فإن :

$$\overrightarrow{CM} // \overrightarrow{NQ_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \lambda\, \overrightarrow{NQ_1}$$

$$(x-0)\vec{\imath} + (y-0)\vec{\jmath} + (z-0)\vec{k} = \lambda\left(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}\right)$$

ومنه

$$x = \lambda$$
$$y = 2\lambda$$
$$z = 2\lambda$$

نعوض هذه المعادلات الوسيطية في معادلة الكرة S_1 ونوجد قيمة الوسيط λ :

$$S_1 = \lambda^2 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2 - 4 = 0$$

$$9\lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

نعوض قيمة الوسيط λ بالمعادلات الوسيطية فنحصل على احداثيات نقطة التماس ولتكن:

$$A\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

---

٧) أوجد معادلة الكرة التي تمر بالدائرة C المعينة بالمعادلتين :

$$\begin{cases} S_1^* = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \\ Q_1 = x + 2y + 2z + 6 = 0 \end{cases}$$

والتي تمر أيضا بالنقطة $A(2, 3, -1)$.

الحــل :

أولا نوجد حزمة الكرات المارة بالدائرة المفروضة ولدينا الحزمة من الشكل :

$$S(\lambda) = S_1 + \lambda Q_1$$

$$S(\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 + \lambda(x + 2y + 2z + 6) = 0$$

$$S(\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 + \lambda x + 2\lambda y + 2\lambda z + 6\lambda = 0$$

ثانيا لنوجد قيمة الوسيط λ وذلك بتعويض احداثيات النقطة A بمعادلة الحزمة :

$$S(\lambda) = 2^2 + 3^2 + (-1)^2 - 4 + 2\lambda + 2(3)\lambda + 2(-1)\lambda + \lambda 6 = 0$$

$$S(\lambda) = 4 + 9 + 1 + 2\lambda + 6\lambda - 2\lambda - 4 + 6\lambda = 0$$

$$S(\lambda) = 12\lambda + 10 = 0$$

ومنه :

$$\lambda = -\frac{5}{6}$$

ثالثا نعوض قيمة الوسيط λ بمعادلة حزمة الكرات فنحصل على معادلة الكرة المطلوبة :

$$S\left(-\frac{5}{6}\right) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 - \frac{5}{6}x + \left(-\frac{5}{3}\right)y + 2\left(-\frac{5}{6}\right)z - 5 = 0$$

نضرب طرفي العلاقة السابقة بـ 6 نجد أن معادلة الكرة المطلوبة من الشكل :

$$S = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 5x - 10y - 10z - 54 = 0$$

السؤال الثاني :

١) أوجد معادلتي المستقيم الناظم ومعادلة المستوي المماس للسطح S في النقطة $M_0(1, 1, 0)$

الحـــل :

أولا نوجد المشتقات الجزئية للتابع f عند النقطة M_0 :

$$\left.\begin{matrix} f'_x = 2x - 2y + 4z - 1 \\ f'_y = 2y - 2x - 4z + 1 \\ f'z = 8z + 4x - 4y - 2 \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{بتعويض احداثيات النقطة } M_0} \left\{\begin{matrix} f'_{x_0} = -1 \\ f'_{y_0} = +1 \\ f'z_0 = -2 \end{matrix}\right.$$

ثانيا لدينا معادلة المستوي المماس للسطح S من الشكل :

$$f'_{x_0}(X - x) + f'_{y_0}(Y - y) + f'z_0(Z - z) = 0 \quad (1)$$

حيث:

X, Y, Z احداثيات نقطة متحولة على المستوي المماس .

وبتعويض قيم المشتقات الجزئية عند النقطة M_0 نجد :

$$-1(X - 1) + 1(Y - 1) - 2(Z - 0) = 0$$

$$-X + 1 + Y - 1 - 2Z = 0$$

ومنه معادلة المستوي المماس للسطح S :

$$-X + Y - 2Z = 0$$

ثالثا لدينا معادلتي المستقيم الناظم للسطح S من الشكل :

$$\frac{X - x}{f'_{x_0}} = \frac{Y - y}{f'_{y_0}} = \frac{Z - z}{f'z_0} \Rightarrow \frac{X - 1}{-1} = \frac{Y - 1}{1} = \frac{Z - 0}{-2}$$

حيث:

X, Y, Z احداثيات نقطة متحولة على المستقيم الناظم .

٢) عين مركز تناظر السطح S .

الحــل :

أولا نقوم بحساب المشتقات الجزئية لمعادلة السطح :

$$f'_x = 2x - 2y + 4z - 1 = 0 \quad (1)$$
$$f'_y = 2y - 2x - 4z + 1 = 0 \quad (2)$$
$$f'z = 8z + 4x - 4y - 2 = 0 \quad (3)$$

ثانيا : نناقش حلول جملة المعادلات السابقة $(1), (2), (3)$

من المعادلات الثلاث السابقة نلاحظ أمثال المجاهيل في كل سطرين مع الثوابت وفي هذه الحالة الجملة تمثل ثلاث مستويات متطابقة وتكون جميع نقاط مستويها المشترك هي نقاط تناظر للسطح ويكون هذا المستوي هو مستوي تناظر للسطح S .

--- انتهى الحــل ---