بسم الله الرحمن الرحيم

مدرّس المقرّر : د. محمّد الشيخ / تاريخ المحاضرة : 2/11/2016

مبرهنات (دون برهان) :

١) المجموعة المغلقة والجزئيّة من متراصة هي متراصة :

$F \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$: F مغلقة و K متراصة $\Leftarrow$ F متراصة.

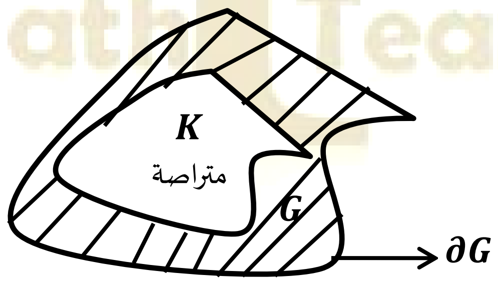
لأنَّ كلَّ جزئية من متراصة هي محدودة لأنَّ المتراصة محدودة ولأنّها مغلقة وبالتالي الجزئية من المتراصة تكون متراصّة .

٢) تقاطع مغلقة مع متراصة هي مجموعة متراصة:

$F \subseteq \mathbb{C}$ مغلقة و K متراصة في $\mathbb{C}$ $\Leftarrow$ $F \cap K$ متراصة.

٣) لا يمكن لمجموعة متراصة K جزئية من مفتوحة G أن تقترب من محيط G بالقدر الّذي نشاء ، إذ لو سمح لها أن تقترب بالقدر الذي نشاء لأصبحت مغلقة ، أي دائماً سيكون هناك عدد موجب بحيث محيط المفتوحة والمتراصة البعد بينهم موجب تماماً :

$$\exists \boldsymbol{r} > \mathbf{0} \,; \boldsymbol{d}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) > \boldsymbol{r} \,, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{K} \,, \boldsymbol{b} \in \underbrace{\boldsymbol{\partial G}}_{\text{المحيط}}$$



والآن لنكمل في التعاريف الطبولوجيّة للأعداد العقديّة:

٩) محيط مجموعة لـ $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{C}$:

نقول عن النقطة a إنّها محيطية لـ A إذا حوى أي جوارلها نقطة من A ونقطة من A^c (متممتها) .

ويرمز لمجموعة النقاط المحيطيّة بـ ∂A أو $F_{r_0}(A)$.

ومن التعريف نستنتج أنَّ: $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$

((محيط مجموعة هو تقاطع لصاقة المجموعة مع لصاقة متممتها)).

١٠) خارج المجموعة لـ $A \in \mathbb{C}$:

خارج المجموعة A هو داخل متمّمتها ، أي:

$$EXT\ (A) = (A^c)^o$$

مثال:

$$A = D(0,1)$$

حيث: $A = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < 1\}$

أثبت أنَّ:

$$\overline{A} = \overline{D(0,1)} = \overline{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| \leq 1\}$$

الحل:

$$A^c = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| \geq 1\}$$

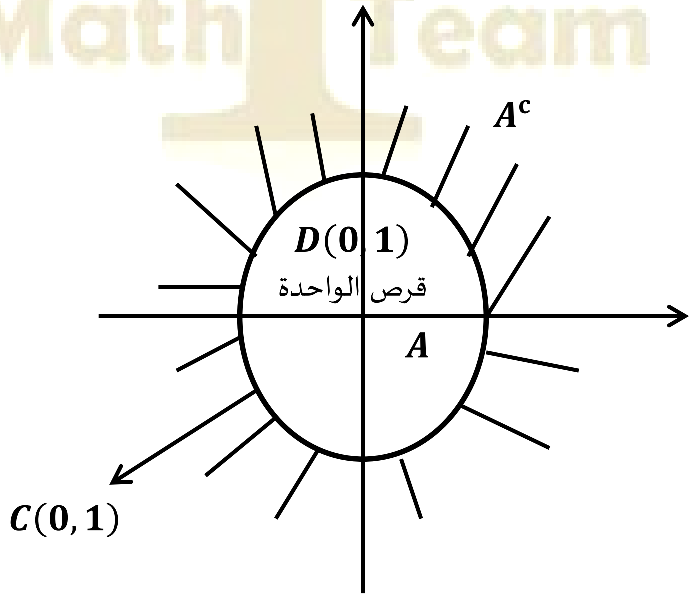
A^c مجموعة مغلقة لصاقتها تساويها ، أي:

$$\overline{A^c} = A^c$$

$$\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c} = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 1\} = c(0,1)$$ دائرة الواحدة

وهنا وجدنا تطابق المحيط الهندسي مع المحيط التبولوجي .

$$EXT\ (A) = (A^c)^o = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| > 1\}$$



تذكرة (التغطية):

التغطية للمجموعة A هي جماعة اجتماع جميع عناصرها يحوي المجموعة A عندها نصفها بأنّها مفتوحة ، هذا يعني أنَّ جميع عناصر هذه المجموعة هي مجموعات مفتوحة.

١١) المجموعة المترابطة بـ $G \subseteq \mathbb{C}$:

نقول عن G إنّها مترابطة إذا لم نتمكّن من كتابتها اجتماعاً (اتحاداً) لمجموعتين A, B غير خاليتين مفتوحتين ومنفصلتين (تقاطعهم خالي) ، أي لا يوجد أي مجموعتان A, B بحيث يكون :

$$A \cap B = \phi \ , \ G = A \cup B$$

* وإلا فإننا نقول عن G إنها **غير مترابطة** ، أي:

G غير مترابطة $\Leftrightarrow$ وجود مجموعتين غير خاليتين مفتوحتين ومنفصلتين A, B بحيث يكون:

$$G = A \cup B$$

* " من الممكن تعميم هذه الحالة إلى مجموعتين مغلقتين أيضاً " ، أي بامكاننا أن نستبدل كلمة (المفتوحتين) في التعريف السابق بكلمة (المغلقتين) ويبقى التعريف كما هو.

* إذا كانت G غير مترابطة وكانت A, B مجموعتان غير خاليتان ومفتوحتان ومنفصلتين تحققان: $G = A \cup B$ فإننا نكتب $G = (A/B)$ ، ونسمي A/B **فصلاً** للمجموعة G.

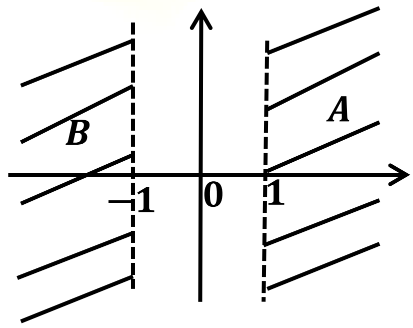
مثال:

$$G = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |Re\, z| > 1\}$$

الحل:

حسب خواص القيمة المطلقة ، نعلم أنَّ:

$$|x| > r \ \Leftrightarrow \begin{cases} x < -r \\ x > r \ : \ \text{أو} \end{cases} \Rightarrow |Re\, z| > 1 \ \Leftrightarrow \begin{cases} Re\, z < -1 \\ Re\, z > 1 \ : \ \text{أو} \end{cases}$$



$$\Rightarrow G = A \cup B \ ; A = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ Re\, z > 1\} \ , \ \ B = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ Re\, z < -1\}$$

وضوحاً إنَّ: $A \neq \phi \ , \ B \neq \phi$ و A, B مجموعتان مفتوحتان في $\mathbb{C}$ ، بحيث: $A \cap B = \phi$

وأيضاً يتضح من الرسم أن A و B منفصلتين .

مما سبق نجد أنَّ: G غير مترابطة وإن (A/B) فصلاً لها.

١٢) المجموعتان غير المتصلتين:

نقول عن مجموعتان جزئيتان A و B من $\mathbb{C}$ إنّهما غير متصلتين إذا تحقق :

$$\bar{A} \cap B = \phi \quad , \quad A \cap \bar{B} = \phi$$

مبرهنة:

كل غير متصلتين منفصلتين والعكس غير صحيح بالضرورة .

البرهان:

بفرض أن A, B غير متصلتين ، فيكون:

$$A \cap B \subseteq A \cap \bar{B} = \phi \ \Rightarrow A \cap B = \phi$$

ومنه $A\ , B$ منفصلتان.

وإن العكس غير صحيح في الحالة العامة ، إذ قد توجد مجموعتان منفصلتان ومتصلتين في آنٍ واحد ،

ومثال على ذلك:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ ; Re\, z < 1\} \ , \quad B = \{z \in \mathbb{C} \ ; Re\, z \geq 1\}$$

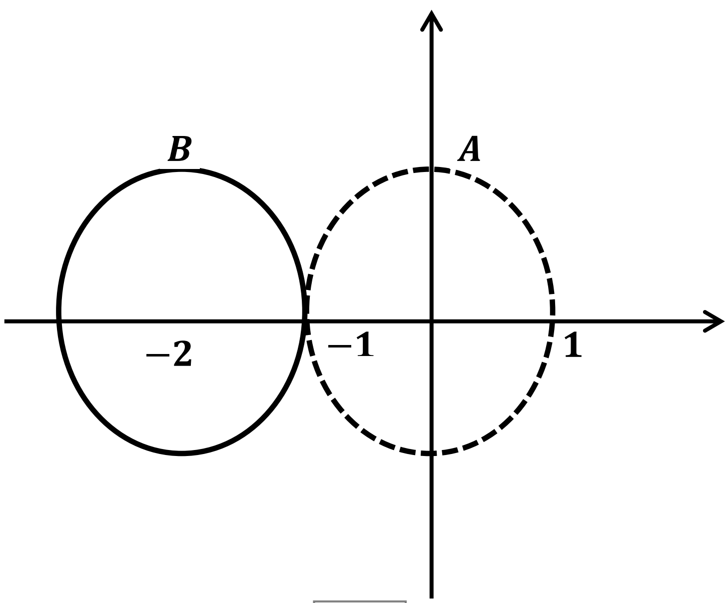
هما مجموعتان متصلتان ، ومنفصلتان معاً.

مثال آخر:

بأخذ: $A = D(0,1)$ (قرص الواحدة المفتوح) و $B = \overline{D}(-2,1)$ (قرص مغلق)

فإن : $A \cap B = \phi$ ومنه A و B منفصلتان .

ولكنَّ $\overline{A} \cap B = \{-1\} \neq \phi$ إذاً: A و B متصلتين .



تعريف آخر للمجموعة غير المترابطة:

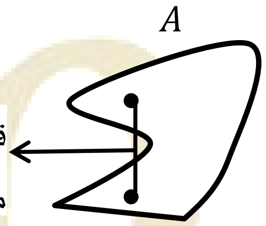
نقول عن مجموعة G إنّها غير مترابطة إذا وفقط إذا وجدت مجموعتان غير خاليتان وغير متصلتين ، واجتماعهما يساوي G .

تمرين: (وظيفة)

أثبت أنَّ التعريفين متكافئين .

١٣) المجموعة المحدّبة:

نقول عن المجموعة $A \subseteq \mathbb{C}$ إنّها محدّبة إذا أمكن الوصل بين أيّ نقطتين منها بقطعة مستقيمة واقعة بأكملها في A .



قطعة مستقيمة واصلة بين نقطتين ليست محتواة بكاملها في A ، فهي ليست محدبة.

ومنه نستنتج أنَّ:

أنصاف المستويات جميعها مجموعات محدبة ، سواء كان المستقيم المنصف ضمن المجموعة أو خارجها.

وإنَّ الأقراص (مفتوحة أو مغلقة) هي مجموعات محدبة.

الخط المضلّعي:

لتكن : $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{n+1}$ مجموعة من النقاط في المستوي العقدي ، ولتكن l_K القطعة المستقيمة الواصلة بين z_K و z_{K+1} حيث : $K = 1,2, \dots, n$ ، نسمّي المتتالية للقطع المستقيمة المرتّبة خطّاً مضلّعيّاً بدايته z_1 ونهايته z_{n+1} ، و ورؤوسه هي النقاط $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{n+1}$.

مبرهنة:

إذا أمكن الوصل بين أي نقطتين من مجموعة $A \subseteq \mathbb{C}$ بخط مضلعي محتوى بكامله في A عندئذٍ فإنَّ: A مترابطة .

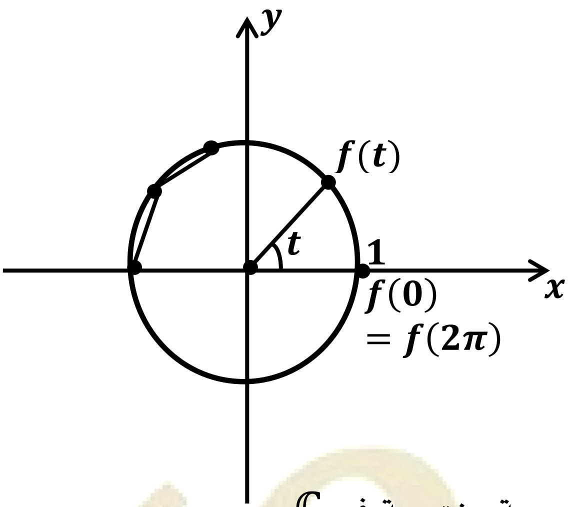
ولكن: العكس لهذه المبرهنة غير صحيح بالضرورة ، ومثال على ذلك:

الدائرة $C(0,1)$ دائرة الواحدة مجموعة مترابطة ، لأنَّه:

بأخذ التابع التالي:

$$f : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto f(t) = e^{it} = \cos t + i.\sin t$$
$$f([0,2\pi]) = c(0,1)$$

إن التابع f مستمر على المجال $[0,2\pi]$ ، ولما كان المجال مجموعة مترابطة وحيث إنَّ صورة أي مجموعة مترابطة وفق تابع مستمر هي مجموعة مترابطة والصورة هنا هي دائرة الواحدة وبالتالي الدائرة الواحدية مترابطة.



<u>**نلاحظ أنَّ:**</u> الدائرة ليست مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$ ،

ولكنّها مترابطة ولا يمكن أن نربط بين أيّ نقطتين منها بخط مضلعي يقع كامله في الدائرة .

<u>**ملاحظة:**</u>

الدائرة هي فقط المحيط ، أمّا القرص هو المحيط مع الداخل .

<u>**ملاحظات:**</u>

* صورة مجموعة مترابطة وفق تابع مستمر هي مجموعة مترابطة .

* صورة مجموعة متراصة وفق تابع مستمر هي مجموعة متراصة .

*المجموعات المترابطة في $\mathbb{R}$ هي المجالات سواء كان المجال مفتوح أو مغلقأو نصف مفتوح أو نصف مغلق.

* المجال المغلق في $\mathbb{R}$ هي مجموعة متراصة في $\mathbb{R}$ ، فالدائرة مجموعة متراصة أيضاً.

<u>**نتيجة :**</u>

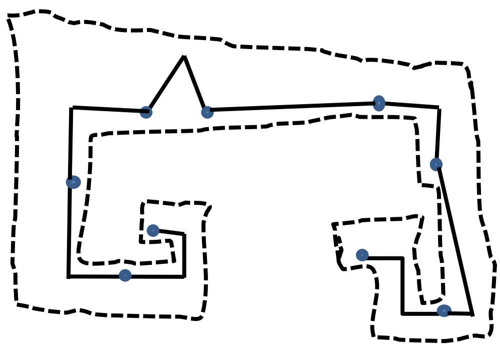
المجموعة المحدبة هي مجموعة مترابطة يكون خطها المضلعي مكون من قطعة مستقيمة واحدة ، وهي أبسط نوع منها .

ولكن العكس غير صحيح بالضرورة ، فقد توجد مجموعة مترابطة ولكنها غير محدّبة، <u>**فمثلاً:**</u>

المجموعة المرسومة جانباً:

يمكن الوصل بين أي نقطتين منها بخط مضلعي

واقع بكامله في المجموعة فهي **مترابطة غير محدبة** .



مبرهنة:

إذا كانت $G \subseteq \mathbb{C}$ مفتوحة ومترابطة عندئذٍ:

يمكن الوصل بين أي نقطتين من G بخط مضلعي واقع بكامله في G .

" انتهت المحاضرة "

☺ لا تنسونا من صالح دعائكم ☺

إعداد: خالد الشعار & روان الآغا