التحليل العددي1

الدكتورة: رشا بعاج

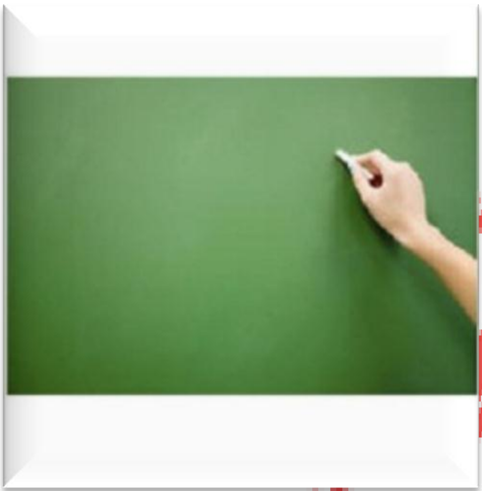
المحاضرة : الخامسة عشر "والأخيرة"

التاريخ : ١٤/١٢/٢٠١٦

إعداد : محمد فليون && عبد الرحمن البحش

حل الوظيفة السابقة

أوجد مشتق الدّالة $f(x)=e^{-x}.\sin x$ عند النقطة: $x=1.0$ من أجل: $h=0.5$ باستخدام ثلاث نقاط بالصّيغة التقدّميّة والمركزيّة والتراجعيّة واحسب الخطأ الأعظمي المرتكب



الحل:

$$x_0-h=0.5 \quad , \quad x_0+h=1.5$$

x_i	$f(x_i)$
0.5	0.29079
1.0	0.30956
1.5	0.2226

◄أولاً نعوض بقانون الصّيغة التقدّميّة:

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h)]$$

$$=\frac{1}{2(0.5)}[-3f(1.0)+4f(1.0+0.5)-f\big(1.0+2(0.5)\big)]$$

$$=\frac{1}{1}[-3f(1.0)+4f(1.5)-f(2)]$$

$$\Rightarrow f'(x_0)=\ -0.161455$$

◄والخطأ الأعظمي المرتكب للصّيغة التقدّميّة هو:

$$E=\frac{h^2}{3}\left|f^{(3)}(\theta_x)\right|$$

نوجد $f^{(3)}(\theta_x)$ حيث لدينا:

$$f(x)=e^{-x}.\sin x$$

$f'(x) = -e^{-x}.\sin x + e^{-x}.\cos x$

$f''(x) = e^{-x}.\sin x - e^{-x}.\cos x - e^{-x}.\cos x - e^{-x}.\sin x = -2e^{-x}.\cos x$

$f'''(x) = 2e^{-x}.\cos x + 2e^{-x}.\sin x = 2e^{-x}(\sin x + \cos x)$

$$\Rightarrow \left|f^{(3)}(\theta_x)\right| = 2$$

$$\Rightarrow E \leq \frac{(0.5)^2}{3}.2 \leq 0.166667$$

◄ثانياً نعوض بقانون الصّيغة المركزيّة:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-f(x_0 - h) + f(x_0 + h)]$$

$$= \frac{1}{2(0.5)}[-f(1.0 - 0.5) + f(1.0 + 0.5)]$$

$$= \frac{1}{1}[-f(0.5) + f(1.5)]$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0.166667$$

ولحساب الخطأ الأعظمي المرتكب للصّيغة المركزيّة نعلم أنَّ:

$$E = \frac{h^2}{6}\left|f^{(3)}(\theta_x)\right|$$

$$\Rightarrow E \leq \frac{(0.5)^2}{6}.2 = 0.833333$$

◄ثالثاً نعوض بقانون الصّيغة التراجعيّة:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0)]$$

$$= \frac{1}{2(0.5)}\left[f\big(1.0 - 2(0.5)\big) - 4f(1.0 - 0.5) + 3f(1.0)\right]$$

$$\approx \frac{1}{1}[f(0) - 4f(0.5) + 3f(1.0)]$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = -0.234466$$

◄والخطأ الأعظمي المرتكب للصّيغة التراجعيّة هو نفسه الخطأ الأعظمي المرتكب للصّيغة التقدميّة :

$$E = \frac{h^2}{3}\left|f^{(3)}(\theta_x)\right|$$

$$\Rightarrow E \le \frac{(0.5)^2}{3}.2 \le 0.166667$$

القيمة التقريبية للمشتق من مراتب عليا:

تنويه: " الاستنتاج غير مطلوب فقط للفهم"

يمكن إيجاد القيمة التقريبية للمشتقات من مراتب عليا (مرتبة ثانية _ثالثة_...)وذلك باستخدام قيم التابع عند نقاط مختلفة فمثلاً من أجل حساب قيمة مشتق التابع f من المرتبة الثانية عند النقطة x_0 يمكن أن نقوم بما يلي:

- ننشر التابع f بجوار x_0 باستخدام مبرهنة تايلور
- نوجد قيمة التابع f عند النقطتين حيث أن θ_x واقعة بين القيمتين $x_0 - h$ و $x_0 + h$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h^1 f'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_0) + \frac{1}{6}h^3 f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\theta_{x_1})$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - h^1 f'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_0) - \frac{1}{6}h^3 f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\theta_{x-1})$$

حيث إنَّ:

$$x_0 - h \le \theta_{x-1} \le x_0 \le \theta_{x_1} \le x_0 + h$$

نجمع المعادلتين طرفاً إلى طرف فنجد:

$$f(x_0+h)+f(x_0-h)=2f(x_0)+h^2f''(x_0)+\frac{h^4}{24}\left[f^{(4)}\left(\theta_{x_1}\right)+f^{(4)}(\theta_{x-1})\right]$$

نعزل الحد $f''(x_0)$ فنجد أنَّ:

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)]-\frac{h^4}{24}\left[f^{(4)}\left(\theta_{x_1}\right)+f^{(4)}(\theta_{x-1})\right]\ldots(*)$$

وبفرض أنَّ $f^{(4)}$ تابع مستمر على المجال: $[x_0-h,x_0+h]$ وبما أنَّ القيمة:

$\frac{1}{2}[f^{(4)}\left(\theta_{x_1}\right)+f^{(4)}(\theta_{x-1})]$ تقع بين القيمتين $f^{(4)}\left(\theta_{x_1}\right)$ و $f^{(4)}(\theta_{x-1})$ فإنَّ هذا يقتضي وحسب مبرهنة القيمة الوسطى وجود عدد θ_x بين θ_{x_1} و θ_{x-1} ينتمي إلى المجال:

$[x_0-h,x_0+h]$ بحيث يحقق: $f^{(4)}(\theta_x)=\frac{1}{2}[f^{(4)}\left(\theta_{x_1}\right)+f^{(4)}(\theta_{x-1})]$

مما يسمح لنا بكتابة $(*)$ بالشكل:

$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)]-\frac{h^2}{12}[f^{(4)}(\theta_x)]$
حيث أنّه نسمّي: $\frac{1}{h^2}[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)]$ بالقيمة التقريبية للمشتق.
ونسمّي: $\frac{h^2}{12}[f^{(4)}(\theta_x)]$ بقيمة الخطأ المرتكب E.

مثال:

أوجد المشتق من المرتبة الثانية للدّالة: $f(x)=e^{-x}sinx$ المعطاة عند نقطة $x_0=1.0$

علماً أنَّ: $h=0.5$

الحل:

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)]-\frac{h^2}{12}[f^{(4)}(\theta_x)]$$

$$\approx\frac{1}{(0.5)^2}f(1-0.5)-2f(1.0)+f(1+0.5)$$

$$\approx \frac{1}{(0.5)^2} f(0.5) - 2f(1.0) + f(1.5)$$

$$\approx \frac{1}{(0.5)^2} e^{-0.5}\, sin(0.5) - 2e^{-1.0}\, sin(1.0) + e^{-1.5} sin(1.5)$$

$$\approx 0.423049$$

والخطأ الأعظمى المرتكب هو:

$$E = \left|\frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\theta)\right|$$

نوجد $f^{(4)}(\theta)$:

$$f(x) = e^{-x} sinx$$
$$f(x) = e^{-x} \,.\, sin\, x$$
$$f'(x) = -e^{-x} \,.\, sin\, x + e^{-x} \,.\, cos\, x$$
$$f''(x) = e^{-x} \,.\, sin\, x - e^{-x} .\, cos\, x - e^{-x} \,.\, cos\, x - e^{-x} \,.\, sin\, x = -2e^{-x} \,.\, cos\, x$$
$$f'''(x) = 2e^{-x} \,.\, cos\, x + 2e^{-x} \,.\, sin\, x = 2e^{-x}(sin\, x + cos\, x)$$
$$\Rightarrow f^{(4)}(x) = -4e^{-x} sinx$$

ملاحظة: للإيجاد قيمة (θ) للمشتق يجب دراسة تغيرات الدالة ((وقد كانت دراسة الدالة في مقررنا منذ البداية هي عبارة إذا كانت الدالة متزايدة نأخذ اعلى قيمة للمجال وإذا كانت متناقصة نأخذ أصغر قيمة للمجال)) وهنا في مثالنا تصبح قيمة المشتق (1.3)

$$\Rightarrow E \leq \left|\frac{(0.5)^2}{12}(1.3)\right|$$

إلى هنا نكون قد وصلنا إلى نهاية مقررنا ☺

حل التمارين للمحاضرة الثانية عشر

التمرين الاول :

أوجد حدودية الاستيفاء بطريقة نيوتن من الدرجة الثالثة التي تستوفي التابع

$f(x) = \cos(x)$ علما أنها تحقق البيانات التالية

$X = 0.1$	$F(x) = 0.99500$
$X = 0.2$	$F(x) = 0.98007$
$X = 0.3$	$F(x) = 0.95534$
$X = 0.4$	$F(x) = 0.92106$

الحل:

i	x_i	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(x_i \dots, x_{i+3})$
0	0.1	0.99500 a_0			
			a_1 $\frac{0.98007 - 0.99500}{0.2 - 0.1} = -0.14930$	a_2	
1	0.2	0.98007		-0.49000	
			$\frac{0.95534 - 0.98007}{0.3 - 0.2} = -0.24730$		0.04167 a_3
2	0.3	0.95534		-0.47750	
			$\frac{0.92106 - 0.95534}{0.4 - 0.3} = -0.34280$		
3	0.4	0.92106			

ومنه فإن حدودية الاستيفاء من الدرجة الثالثة التي تستوفي التابع تعطى بالشكل

$$p_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

نعوض قيم كل من a_0, a_1, a_2, a_3 بالتابع

$$p_3(x) = 0.99500 - 0.14930(x - 0.1) - 0.49000(x - 0.1)(x - 0.2) + 0.04167(x - 0.1)(x - 0.2)(x - 0.3)$$

التمرين الثاني :

بفرض أن $f(x)$ يعطى بالأشكال التالية :

$$f(x) = \ln(x + 1) \quad , \quad f(x) = \sqrt{1 + x} \quad , \quad f(x) = \tan(x)$$

أوجد حدوديات استيفاء لاغرانج من الدرجة الأولى والثانية عند العقد :

$x_0 = 0$	$x_1 = 0.6$	$x_2 = 0.9$

الحل : $f(x) = \ln(x + 1)$

i	0	1	2
x_i	0	0.6	0.9
y_i	0	0.4700036292	0.6418538862

وعليه فإنّ الحدودية من الدرجة الثانية $p_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2$

لا نقوم بحساب معامل لاغرانج $l_0(x)$ لأن $f(x_0) = 0$ (يجد كتابة هذه العبارة في الامتحان)

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 0.9)}{(0.6 - 0)(0.6 - 0.9)} = -\frac{x(x - 0.9)}{0.18}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0)(x - 0.6)}{(0.9 - 0)(0.9 - 0.6)} = \frac{x(x - 0.6)}{0.27}$$

نعوّض كل من $l_0(x)$ وَ $l_1(x)$ وَ $l_2(x)$ وَ y_0 وَ y_1 وَ y_2 في قانون الحدوديّة $p_2(x)$

$$= 0 - \frac{x(x-0.9)}{0.18}[0.4700036292] + \frac{x(x-0.6)}{0.27}[0.6418538862]$$

لنحسب الحدودية من الدرجة الأولى $p_1(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1$

لنحسب

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{(x - 0)}{(0.6 - 0)} = +\frac{x}{0.6}$$

لنعوض

$$= \frac{x}{0.6}[0.4700036292]$$

لنحسب $f(x) = \sqrt{1 + x}$

i	0	1	2
x_i	0	0.6	0.9
y_i	1	1.264911064	1.378404875

وعليه فإنّ الحدودية من الدرجة الثانية $p_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2$

$$l_0(x) = \frac{(x - 0.6)(x - 0.9)}{(1 - 0.6)(1 - 0.9)} == +\frac{(x - 0.6)(x - 0.9)}{0.54}$$

$$l_1(x) = \frac{(x - 0)(x - 0.9)}{(0.6 - 0)(0.6 - 0.9)} = -\frac{x(x - 0.9)}{0.18}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - 0)(x - 0.6)}{(0.9 - 0)(0.9 - 0.6)} = \frac{x(x - 0.6)}{0.27}$$

نعوّض كل من $l_0(x)$ وَ $l_1(x)$ وَ $l_2(x)$ وَ y_0 وَ y_1 وَ y_2 في قانون الحدوديّة $p_2(x)$

$$= \frac{(x-0.6)(x-0.9)}{0.54} - \frac{x(x-0.9)}{0.18}[1.264911064] + \frac{x(x-0.6)}{0.27}[1.378404875]$$

لنحسب الحدودية من الدرجة الأولى $p_1(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1$

لنحسب

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} = \frac{(x - 0.6)}{(0 - 0.6)} = -\frac{(x - 0.6)}{0.6}$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{(x - 0)}{(0.6 - 0)} = +\frac{x}{0.6}$$

لنعوض

$$= -\frac{(x - 0.6)}{0.6} + \frac{x}{0.6}[1.264911064]$$

لنحسب $f(x) = \tan(x)$

i	x_0	x_1	x_2
x_i	0	0.6	0.9
y_i	0	0.6841368083	1.260158218

لنأخذ الحدودية من الدرجة الثانية

$$p_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2$$

لا نقوم بحساب $l_0(x)$ لأن $f(x_0) = 0$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 0.9)}{(0.6 - 0)(0.6 - 0.9)} = -\frac{x(x - 0.9)}{0.18}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0)(x - 0.6)}{(0.9 - 0)(0.9 - 0.6)} = \frac{x(x - 0.6)}{0.27}$$

نعوض المعاملات في الحدودية :

$$p_2(x) = 0 - \frac{x(x - 0.9)}{0.18}[0.6841368083] + \frac{x(x - 0.6)}{0.27}[1.260158218]$$

$$= -3.800760046(x)(x - 0.9) + 0.4667252659(x)(x - 0.6)$$

اما الحدودية من الدرجة الاولى :

وجدنا أن $l_0(x)y_0 = 0$

$$l_1(x) = \frac{x - 0}{0.6 - 0} = \frac{x}{0.6}$$

$$p_1(x) = 0 + \frac{x}{0.6}(0.6841368083) = 1.140228014x$$

التمرين الثالث :

قرب $f(0.05)$ الموافق للبيانات التالية:

x_i	0.0	0.2	0.4	0.4	0.8
$f\_(x_i)$	1.00000	1.122140	1.49182	1.82212	2.22554

مستخدما استيفاء نيوتن بطريقة الفروق التقدمية

الحل: لدينا ٥ نقاط فتكون الحدودية حسب نيوتن من الدرجة ٤ والان لنعين

a_0, a_1, a_2, a_3, a_4

i	x_i	$f(x_i)$				
0	0.0	a_0 1.00000				
			a_1 $\frac{1.22140-1.00000}{0.2-0.0} = 1.107$			
1	0.2	1.22140		a_2 0.61275		
			$(1.49182 - 1.22140)/(0.4 - 0.2) = 1.3521$		a_3 0.22625	
2	0.4	1.49182		0.7485		a_4 0.06197916667
			$(1.82212 - 1.49182)/(0.6 - 0.4) = 1.6515$		0.2758333	
3	0.6	1.82212		0.914		
			$\frac{2.22554 - 1.82212}{0.8 - 0.6} = 2.0171$			
4	0.8	2.22554				

$$p_4(x) = 1.00000 + 1.107(x-0.0) + 0.61275(x-0.0)(x-0.2) + 0.22625(x-0.0)(x-0.2)(x-0.4) + 0.06197916667(x-0.0)(x-0.2)(x-0.4)(x-0.4)$$

$$\boldsymbol{f(0.05) \approx p_4(0.05) = 1.05125879888}$$

التمرين الرابع:

لتكن $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$ قرب $f(1.03)$ لحدوديات هرميت ذات الدرجة التي لا تزيد عن 3 باستخدام $x_1 = 1.05, x_0 = 1$

الحل:

نوجد المشتق لـ f

$$f'(x) = 3e^x + 3xe^x - 2e^{2x}$$

i	x_i				
0	1	0.7657893864			
			1.531578773		
0	1	0.7657893864		−27748863	
			1.392834458		−4.7502368
1	1.05	0.8354311093		−3.01239814	
			1242214551		
1	1.05	0.8354311093			

$$H_3 = a_0 + (x-x_0)a_1 + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^2(x-x_1)$$

$$= 0.7657893864 + 1.531578773(x-1) - 27748863(x-1)^2 - 4.7502368(x-1)^2(x-1.05)$$

$$f(1.03) \approx H_3(1.03) \approx 0.8092892999$$

$$E = |T - Q|$$

$$Q = H_3(1.03) = 0.8092892999$$

$$T = f(1.03) = 0.8093236189$$

$$E = 3.43190017 * 10^{-5}$$

التمرين الخامس :

أعد المثال الرابع بحدوديات هرميت ذات الدرجة التي لا تزيد عن 4 باستخدام :

$x_0 = 1 \qquad x_1 = 1.05 \qquad x_2 = 1.07 \quad , \quad f(x) = 3e^x + 3xe^x - 2e^{2x}$

الحل :

i	x_i	$f(x_i)$					
0	1	0.765893864					
			1.5315787				
0	1	0.765893864		−2.7748863			
			1.3923344		−4.7502368		
1	1.05	0.835431109		−3.01239814		−3.504292567	
			1.2422145		−4.99553		−1.708107757
1	1.05	0.835431109		−3.36208575		−3.6238602	
			1.1749728		−5.2492075		
2	1.07	0.858930566		−3.4670699			
			1.1056314				
2	1.07	0.858930566					

$$P_4(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^2(x - x_1) + a_4(x - x_0)^2(x - x_1)^2 + a_5(x - x_0)^2(x - x_1)^2(x - x_2)$$

$$P_4(x) = 0.765893864 + 1.531578773(x-1) + (-2.7748863)(x-1)^2 + (-4.7502368)(x-1)^2(x-1.05) + (-3.504292567)(x-1)^2(x-1.05)^2 + (-1.708107757)(x-1)^2(x-1.05)^2(x-1.07)$$

لهنا نكون قد أنهينا حل التمارين التي أعطيت في المحاضرة ١٢ كوظيفة.

◁ و حرصاً على الدقة العلمية التي نسعى أن نقدمها لكم ، إليكم تصحيح أخطاء وردت بالمحاضرات السابقة:

#المحاضرة الثانية: ص(٢) $3(d.s) \longrightarrow 3.14$

ص(٣) : عدد الحدوديات ٣ التي تم اقتطاعها

#المحاضرة الثالثة :ص(٣)

$$Q = 0.5.\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\left(0.5.\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^3}{3!} = 0.7046526512$$

ملاحظة: p_{n+1} هي عبارة عن حدودية يتم اقتطاعها من المتسلسلة دون العاملي والقيمة المطلقة لها

#المحاضرة الرابعة: ص(٣) بالجدول السطر الثالث 1.625 بدل 1.375

#المحاضرة الخامسة : ص(٣) $\lambda = \frac{x_{n-2} - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$ الخطأ

$$\lambda = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$$

الخطأ $f(x) = x^2 + 2x^2 - x - 1$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$$ الصواب

#المحاضرة السادسة: ص(٣) قانون طريقة الوضع الخاطئ

$$x_n = x_{n-1} - \left[\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f_{n-1} - f_{n-2}}\right] \cdot f_{n-1}$$

#المحاضرة السابعة: ص(٧) x_2 بدل x_1

الخطأ $\lambda = \max|g'(x)| < 1$

$$\lambda = \max|g'(x)| > 1$$

عندما لا تتقارب الطريقة التكرارية

#المحاضرة الثامنة ص(٣)

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)}$$

ص(٦)بالتمرين أوجد الخطأ الأعظمي المرتكب والخطأ الفعلي عند النقطة

$(0.45x =)$

$$f^{(n+1)}(\theta) = f^{2}(\theta)$$

#المحاضرة العاشرة بحل تمرين المحاضرة السابقة

$$p_4(x) = a_0 + a_1(x) + a_2(x)(x - 1) + a_3(x)(x - 1)(x - 3)$$

$$+a_4(x)(x - 1)(x - 3)(x - 6)$$

أوجد تقريباً لـ $f(0,34)$ باستخدام حدوديّة هرميت ((المثال (١)))

المثال (١) ص(٣) إن ارقام الجدول ل x_i عند طباعة الجدول تم جذف الرقم العشري الثاني $x_2 = 0.35$,$x_1 = 0.32$

#المحاضرة الثالثة عشر : ص(٣)

$$I(f) = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

بذلك تكون قد نكون أنهينا المحاضرة الأخيرة آملين أن نكون قد قدمنا لكم مادة مفيدة

و راجين الله تعالى أن يوفقكم في جميع المواد و أن يوفقنا في تطوير كل ما نقدمه لكم في سبيل

تطوير رياضياتنا .

مع تحيات فريق سيريا ماث التطوعي ^_^