بسم الله الرحمن الرحيم

مادة التحليل العقدي ((١))

مدرّس المقرّر : د. محمّد الشيخ / تاريخ المحاضرة : 5/10/2016

الفصل الأوّل : مجموعة الأعداد العقديّة (المركّبة)

درسنا في المحاضرة السابقة مجموعة الأعداد العقدية وعلمنا أنّها من الشكل:

$$\mathbb{C} = \{z = (\alpha, \beta) \ ; \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

واستنتجنا أنَّ:

- $(\mathbb{C}, +, .)$ حقل تبديلي ، وأنَّ هذا الحقل لا يمكن أن يكون حقلاً مرتّباً كليّاً .
- وإنَّ $\mathbb{C}$ مع عمليتي الجمع والضرب بسلمي هو $(\mathbb{C}, +, \times)$ فضاء متجهي حقيقي بعده 2 وعناصر قاعدته $\{(0,1), (1,0)\}$.
- وجدنا أنَّ $\mathbb{R}$ متماثل حقليّاً مع الحقل الجزئي $\mathbb{R} \times \{0\}$ من $\mathbb{C}$ وسنرى أنّه اعتماداً على هذه النتيجة سنستطيع كتابة العدد العقدي بالشكل الجبري : $z = \alpha + i\beta$ وأنَّ: $i^2 = -1$.

<u>الشكل الجبري (الديكارتي) للعدد العقدي:</u>

بفرض : $z = (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$ ، فإننا يمكن أن نكتب (حسب العمليات التي عرفناها سابقاً) :

$$z = (\alpha, \beta) = (\alpha, 0) + (0, \beta) = \alpha + (\beta, 0)(0,1) = \alpha + \beta.i = \alpha + \beta.i$$

حيث: $i = (0,1)$

ولنثبت أنَّ: $i^2 = -1$:

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1$$

وبالتالي يكون :

$$z = \alpha + \beta.i \ ; \ i^2 = -1$$

وهو الشكل الجبري (الديكارتي) للعدد العقدي z .

يسمّى α بالقسم الحقيقي لـ z ، يرمزله بالرمز: $Re(a)$.

يسمّى β بالقسم التخيلي لـ z ، يرمزله بالرمز: $Im(a)$.

فمثلاً: $Re\left(2 + \frac{1}{2}i\right) = 2 \ , \ Im(2 - 3i) = -3$

<u>ملاحظة:</u> إنَّ إشارة $(-)$ غير مرتبطة مع i بل مع العدد .

العمليّات الجبرية على الأعداد العقديّة بشكلها الديكارتي (الجبري) :

بفرض : $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ فإنَّ:

- **التساوي:**

$$a_1 = a_2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{تعريفاً}} Re(a_1) = Re(a_2) \wedge Im(a_1) = Im(a_2)$$

- **الجمع:**

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= (Rea_1 + i.Ima_1) + (Rea_2 + i.Ima_2) \\ &= (Rea_1 + Rea_2) + i(Ima_1 + Ima_2) \end{aligned}$$

مثال:

$$(2 - 3i) + (-5 + 4i) = -3 + i$$

- **الضرب:**

$$\begin{aligned} a_1.a_2 &= (Rea_1 + i.Ima_1).(Rea_2 + i.Ima_2) \\ &= (Rea_1.Rea_2) - Ima_1.Ima_2 + i(Rea_1.Ima_2 + Rea_2.Ima_2) \end{aligned}$$

- **الضرب بعدد حقيقي:** $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$

$$\lambda.a = \lambda(Rea + i.Ima) = \lambda.Rea + i(\lambda.Ima)$$

- **المقلوب لعد عقدي (جبريّاً):**

إنَّ مقلوب العدد العقدي : $a = \alpha + \beta.i$ هو العدد العقدي :

$$a^{-1} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - i.\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

وظيفة: أثبت صحة ذلك ، أي أثبت أنَّ:

$$a.a^{-1} = (1,0) = 1 + 0\,i = 1$$

قوى العدد التخيلي $\boldsymbol{i}$:

$$i^1 = i \ , \ i^2 = -1 \ , \ i^3 = -i \ , \ i^4 = 1 \ , \ldots$$

$$\Rightarrow i^{4n} = 1 \ , \ i^{4n+1} = i \ , \ i^{4n+2} = -1 \ , \ i^{4n+3} = -i$$

وبما أنَّ:

$$i^2 = -1 \Rightarrow \frac{1}{i} = -i$$

- **قسمة الأعداد العقديّة :**

$$a_2 \neq 0 : \frac{a_1}{a_2} = a_1 . a_2^{-1}$$

قسمة عدد عقدي على آخر هو البسط بمقلوب المقام ، ومنه يمكن أن نكتب:

$$\frac{a_1}{a_2} = a_1 . a_2^{-1} = (\alpha_1 + \beta_1 . i)\left(\frac{\alpha_2}{{\alpha_2}^2 + {\beta_2}^2} - i . \frac{\beta_2}{{\alpha_2}^2 + {\beta_2}^2}\right)$$
$$= \frac{\alpha_1 . \alpha_2 + \beta_1 . \beta_2}{{\alpha_2}^2 + {\beta_2}^2} + i\left(\frac{-\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 . \alpha_2}{{\alpha_2}^2 + {\beta_2}^2}\right)$$

- **<u>مرافق عدد عقدي:</u>**

إنَّ المرافق للعدد العقدي : $a = \alpha + i\beta$ هو تعريفاً:

$$\overline{a} = \alpha - i\beta .$$

<u>مثال:</u>

$$\overline{(2 - 3i)} = 2 + 3i$$

<u>ملاحظة:</u>

إذا كان الجزء الحقيقي للعدد العقدي (α) معدوم نسمّي العدد العقدي بعدد " تخيّلي بحت " .

و إذا كان الجزء التخيّلي للعدد العقدي (β) معدوم نسمّي العدد العقدي بعدد " حقيقي بحت " .

- **<u>خواص المرافق:</u>**

١) مرافق المرافق هو العدد العقدي نفسه: $\overline{\overline{a}} = a$

٢) جمع المرافقات هو مرافق الجمع: $\overline{a_1} \pm \overline{a_2} = \overline{a_1 \pm a_2}$

٣) ضرب المرافقات هو مرافق الجداء: $\overline{a_1} . \overline{a_2} = \overline{a_1 . a_2}$

٤) قسمة المرافقات هي مرافق القسمة: $\frac{\overline{a_1}}{\overline{a_2}} = \overline{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)}$ ،

٥) $a + \overline{a} = 2Re\, a$

$$a - \overline{a} = 2i . Im\, a$$

٦) a حقيقي بحت $\Leftrightarrow a = \overline{a}$.

a تخيلي بحت $\Leftrightarrow a = -\overline{a}$

ملاحظة (لتسهيل عملية القسمة):

نعلم أنَّ:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} = \frac{\bar{a}}{a.\bar{a}}$$

بفرض: $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1.\overline{a_2}}{a_2.\overline{a_2}}$$

أي لقسمة عدد عقدي على عدد عقدي آخر نضرب البسط والمقام بمرافق المقام.

مثال:

اكتب العد العقدي التالي بالشكل الجبري:

$$\boldsymbol{\frac{1+i}{2-3i}}$$

الحل:

$$\frac{1+i}{2-3i} = \frac{(1+i)(2+3i)}{(2+3i)(2+3i)} = \frac{(2-3)+i(2+3)}{4-(9i^2)} = \frac{-1+5i}{13} = -\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i$$

- **طويلة عدد عقدي:**

بفرض $a = \alpha + i\beta$ عدد عقدي فإنَّ طويلته هي العدد الحقيقي غير السالب:

$$|a| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{Re^2(a) + Im^2(a)}$$

وخواصها:

بفرض a و b عددان عقديان فإنَّ:

١) $|a| \geq 0 \;,\; a.\bar{a} = |a|^2$

٢) $|a| = |-a| = |\bar{a}|$

٣) $|a.b| = |a|.|b|$

٤) $\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$

٥) الطويلة تحقق متراجحة المثلّث:

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|$$

$$|a \pm b| \geq \big||a| - |b|\big|$$

٦) نعلم أنّه أيا كان x من $\mathbb{R}$ فإنّ: $|x|^2 = x^2$

لكن إذا كان a من $\mathbb{C}$ ففي الحالة العامة فإنَّ : $|a|^2 \neq a^2$ ، لأنَّ :

$$a^2 = (\alpha + \beta . i\ )^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha . \beta i$$

وهذا عدد عقدي يحوي قسم تخيلي أي ليس من الضروري أن يكون من $\mathbb{R}$ ، لكننا نعلم أن الطويلة هي:

$$|a|^2 = \alpha^2 + \beta^2 \in \mathbb{R}$$

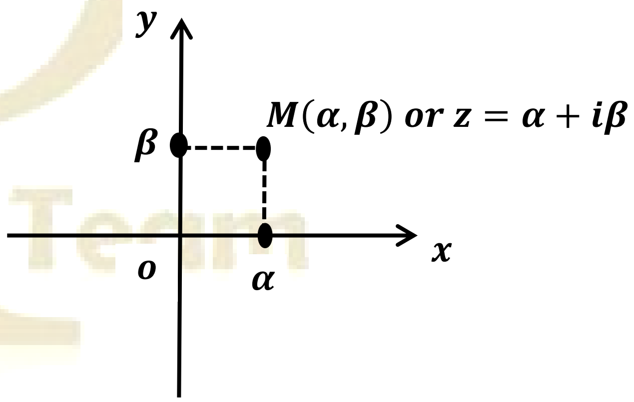
ونستنتج أنَّ $|a|^2 = a^2$ فقط عندما يكون a حقيقي بحت .

وحتى عندما a تخيلي بحت فإن المساواة غير محققة ، فمثلاً :

$$|-3i|^2 = (|-3| . |i|)^2 = (3)^2 = 9\ ;\ |i| = 1$$
$$(-3i)^2 = 9(-1) = -9 \ \Rightarrow (-3i)^2 \neq |-3i|^2$$

التمثيل الهندسي (النقطي) لعدد عقدي:

من المعروف وجود تقابل بين الثنائيّات المرتّبة من الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}^2$ وبين مجموعة نقاط مستوي المنسوب لجملة محورين احداثيين xy .



ملاحظة على الهامش:

من غير الصحيح أن نقول عن النقطة M إنها العدد كذا ، أو كذا ، لكن بسبب وجود هذا التقابل يسمح لنا مجازاً قول ذلك فمثلاً أن نقول عن النقطة $x = 2$ هي العدد 2 فهذا غير صحيح علميّاً ، بل يجب أن نقول هذه النقطة الّتي تقبل (2) على محور الاكسات ، لكن بسبب وجود التقابل نقبل هذا .

ومنه :

إنَّ كل عدد عقدي $z = (\alpha, \beta)$ يقابله نقطة وحيدة $M(\alpha, \beta)$ في المستوي xoy والعكس صحيح ..

نسمّي النقطة M بالنقطة الممثّلة للعدد العقدي : z في المستوي xoy .

أو نقول عن M : صورة z في المستوي xoy ، أو نقول إنَّ z ممثل في المستوي xoy بالنقطة M .

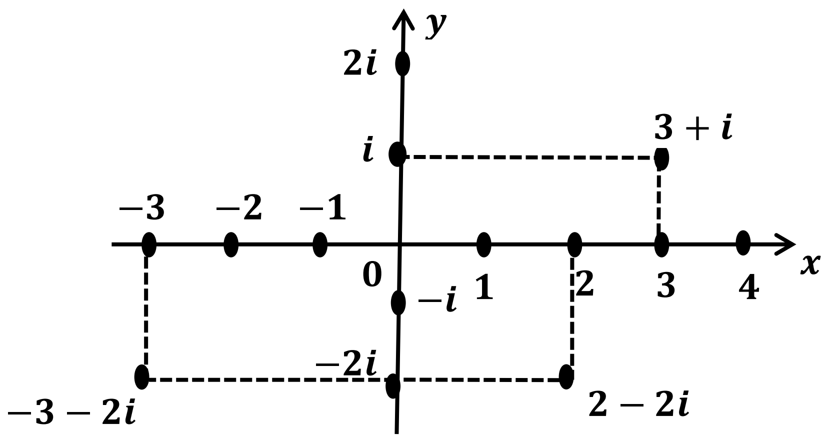
ونسمّي المستوي xoy الّذي تمثّل فيه كلُّ الأعداد العقديّة بالمستوي العقدي ، أو: المستوي z ، أو: مستوي غاوص .

ونلاحظ أنَّ:

نقاط ox : تمثّل الأعداد الحقيقيّة البحتة لذلك نسمّي المحور ox بـ " المحور الحقيقي البحت " .

نقاط oy : تمثّل الأعداد التخيّليّة البحتة لذلك نسمّي المحور oy بـ " المحور التخيلي البحت " .

أمثلة:

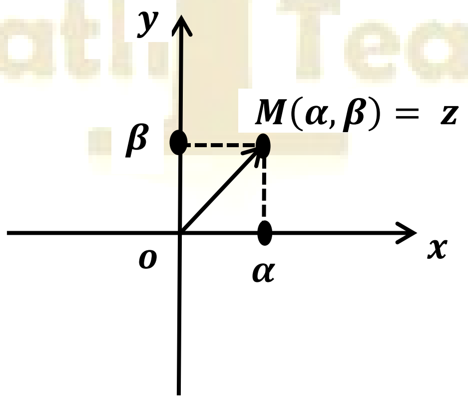


من الآن فصاعداً سنرمز للنقطة M بالرمز z ،

ونقول عن z إنّها : نقطة في المستوي العقدي .

التمثيل المتجهي (الشعاعي) لعدد عقدي:

كما يمكن أن نقابل كل عدد عقدي z (كل نقطة z من المستوي العقدي) بشعاع من المستوي بدايته O ، ونهايته تلك النقطة z .



انتهت المحاضرة ..

مع تحيات فريق الرياضيات الأوّل ^_^

لا تنسونا من صالح دعواتكم