Syria Math

جبر خطي ١

الدكتورة: شغف زوربا

المحاضرة : السابعة عشرة

التاريخ : ٢٠١٦/١٢/١٥

إعداد : منى

Subject: الجبر

١٥ / ١٢ / ٢٠١٦

شروط الفضاء الشعاعي الجزئي ..

1) $u, v \in W_1 \Rightarrow u+v \in W_1$

2) $\lambda \in F, u \in W_1 \Rightarrow \lambda . u \in W_1$

أو شرط واحد ..

$\lambda u + \mu v \in W_1$

أمثلة على الفضاءات الشعاعية الجزئية:

← ليكن $R^2 = V$ فضاءً شعاعياً ونعرف المجموعة

1) $W_1 = \{(x,y) \in V, x = y\}$

$O_V = (0,0) \in W_1$ ، $W_1 \neq \emptyset$

أ) ليكن

$W_1 \ni \begin{cases} u_1 = (x_1, y_1) \\ u_2 = (x_2, y_2) \end{cases}$

فإن:

← $\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases}$

ولنبرهن أن W_1 مغلقة بالنسبة لعملية الجمع.

P: $\Rightarrow x_1 + x_2 = y_1 + y_2$

$\Rightarrow u_1 + u_2 \in W_1$

ب: ليكن $\lambda \in R$ و $u = (x,y) \in W_1$

ولنبرهن أن W_1 مغلقة لعملية الضرب.

$x = y \ , \ \lambda x = \lambda y$

$\Rightarrow \lambda u \in W_1$

الجوهلي (1) «عاطف»

2) $W_2 = \{(x,y) \in R^2 : y = x+1\}$

هل تشكل W_2 فضاءً شعاعياً جزئياً في V؟

- نلاحظ أن W_2 ليس فضاءً شعاعياً جزئياً في V لأن: $O_V = (0,0) \notin W_2$

3) $W_3 = \{(x,y) \in R^2 : y = x^2\}$

$O_V = (0,0) \in W_3$

إن W_3 ليس فضاءً شعاعياً جزئياً في V لأن (u_1, u_2) تحقق العلاقة

$u_1 = (2,4)$, $u_2 = (3,9)$

$u_1 + u_2 = (5,13)$ $\quad 5^2 \neq 13$

وبالتالي W_3 ليس فضاءً شعاعياً جزئياً في V.

مثال 4: ليكن $V = M_{2\times2}(R)$ مجموعة المصفوفات المربعة المعرفة على حقل الأعداد الحقيقية R.

إن V يشكل فضاءً شعاعياً على R

$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a,b,c,d \in R \right\}$

والمجموعة W_1

$W_1 = \{A \in M_{2\times2}(R) ; A^t = A^2\}$

← أثبت أن W_1 تشكل فضاءً شعاعياً جزئياً في V

نلاحظ أن: $O_V = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_1$

1) ليكن $A, B \in W_1$ فإن العلاقة التالية محققة

←

Subject :

$A^t = A \quad , B^t = B$

إذاً $(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$

$\Rightarrow A + B \in W_1$

2) نأخذ $A \in W_1 \ , \lambda \in R$ فإن

$(\lambda . A)^t = \lambda^t . A^t = \lambda . A$

$\rightarrow \lambda . A \in W_1$

من ①.② نستنتج أن W_1 هو فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} ; a, b \in R \right\}$$

ملاحظة:

① نلاحظ أن المجموعة W_2 هي مجموعة جزئية من V: $W_2 \subseteq V$

$$0_V = 0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_2 \Rightarrow W$$

① لنكن $\alpha , \beta \in R$ و

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} , A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \in W_2$$

ولنثبت العلاقة التالية:

$\alpha . A_1 + \beta A_2 \in W_2$?

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = \alpha \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_1 & 0 \\ 0 & \alpha b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a_2 & 0 \\ 0 & \beta b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & 0 \\ 0 & \alpha b_1 + \beta b_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix}$$

حيث $\alpha a_1 + \beta a_2 = a' \in R$

$\alpha b_1 + \beta b_2 = b' \in R$

طريقة ② «الإثبات والبرهان»

1) $A_1 + A_2 \in W_2$

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} \in W_2$$

2) $\alpha . \lambda \in W_2$

$$\begin{pmatrix} \alpha . a & 0 \\ 0 & \alpha . b \end{pmatrix} \in W_2$$

إذاً W_2 فضاء شعاعي جزئي من V

$$W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} ; a, b \in R \right\}$$

هل W_3 فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V (أو من R^2) ؟..

* نلاحظ أن:

$$0_V = 0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W_3$$

وبالتالي W_2 ليس فضاء شعاعي جزئي..

مثال 2: إذا كان V فضاءً شعاعياً معرفاً على الحقل F فإن V فضاءً شعاعياً جزئياً ~~بصورة~~ من نفسه $W = \{0\}$ هي فضاء شعاعي جزئي من V يسمى الفضاء الشعاعي المكون من عنصر وحيد بالفضاء الصفري هو فضاء شعاعي جزئي من V ...

-٣-

AL SAMRAH

Subject:　　/　/

مثال: $W=\{(x,y,z)\in R^3 : x-y+z=0\}$

مجموعة جزئية من الفضاء الشعاعي $V=R^3$ أثبت أن W هو فضاء شعاعي جزئي من V

الحل:

$0_V=(0,0,0)\in W$

$u_1=(x_1,y_1,z_1)$, $u_2=(x_2,y_2,z_2)$ $\in W$

$u_1+u_2=(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)$

$=(x_1+x_2),(y_1+y_2),(z_1+z_2)$

$=(x-y+z)=0 \Rightarrow$

$(x_1+x_2)-(y_1+y_2)+(z_1+z_2)$

$=(x_1-y_1+z_1)+(x_2-y_2+z_2)$

$=0+0=0$

$\Rightarrow u_1+u_2\in W$

الشرط الأول محقق

ب) $\lambda\in R, u=(x,y,z)\in R^3$

$\lambda.u=\lambda.(x,y,z)$

$=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$

$=\lambda x-\lambda y+\lambda z$

$=\lambda(x-y+z)$

$=\lambda.0=0\Rightarrow \lambda.u\in W$

الشرط الثاني محقق

مبرهنة: إذا كانت W_1 ، W_2 فضائين شعاعيين جزئيين في فضاء شعاعي V معرف على حقل F فإن $W_1\cap W_2$ هو فضاء شعاعي جزئي في V

الإثبات:

$0_V\in W_1$ لأن W_1 فضاء شعاعي جزئي في V

$0_V\in W_2$ لأن W_2 فضاء شعاعي جزئي في V

$\Rightarrow 0_V\in W_1\cap W_2$

$\Rightarrow W_1\cap W_2\neq\emptyset$

فإذا كانت $u,v\in W_1\cap W_2$ و $\lambda,\mu\in F$

$\Leftarrow \lambda.u+\mu.v\in W_1$ لأن W_1 فضاء شعاعي جزئي في V

$\lambda.u+\mu.v\in W_2$ لأن W_2 فضاء شعاعي جزئي في V

$\lambda.u,\mu.v\in W_i ; i=1,2,\dots,n$

$\Rightarrow \lambda.u+\mu.v\in W_1\cap W_2$

إذاً $W_1\cap W_2$ هو فضاء شعاعي جزئي في الفضاء V

* نستطيع تعميم المبرهنة السابقة على أكثر من فضاء شعاعي جزئي من V، ونقول أن تقاطع فضاءات شعاعية جزئية في فضاء شعاعي V هو فضاء شعاعي جزئي من V

مثال: إن أي مستوي مار من المبدأ في الفضاء الشعاعي $V=R^3$ هو فضاء شعاعي جزئي في V وبالتالي يكون تقاطع أي مستويين مارين في المبدأ هو فضاء شعاعي جزئي من V وعليه

Subject :

يبين أن مستقيم مار في المبدأ بالفضاء الشعاعي V هو فضاء شعاعي جزئي في V لأنه تقاطع مستويين جزئيين في المبدأ ـ

«مبرهنة»

ليكن V فضاء شعاعي معرف على الحقل F، و ليكن W_1, W_2 فضائين جزئيين في V
أثبت أن $W = W_1 \cup W_2$ فضاء شعاعي جزئي في V إذا وفقط إذا كان
$W_2 \subseteq W_1$ أو $W_1 \subseteq W_2$.

البرهان:

لزوم الشرط:

لنفرض أن $\bar{W} = W_1 \cup W_2$ فضاء شعاعي جزئي ولنفرض جدلاً:
$W_1 \not\subseteq W_2$ و $W_2 \not\subseteq W_1$.
وبما أن $W_1 \not\subseteq W_2$ فإنه يوجد $w_1 \in W_1$ بحيث أن $w_1 \notin W_2$
وبما أن $W_2 \not\subseteq W_1$ فإنه يوجد $w_2 \notin W_1$
هذا من جهة ـ
ومن جهة أخرى بما أن:
$w_1, w_2 \in \bar{W} = W_1 \cup W_2$.
وبما أن $\bar{W}$ فضاء شعاعي جزئي في V فرضاً فإن:
$w = w_1 + w_2 \in \bar{W}$ وبالتالي فإن:
إما $w \in W_1 \Rightarrow$
$w_2 = w - w_1 \in W_1$.
وهذا غير ممكن لأن:
$w_2 \notin W_1$ فرضاً

أو $w \in W_2 \Rightarrow w_1 = w - w_2 \in W_2$
وهذا غير ممكن لأن $w_1 \notin W_2$ فرضاً
وبالتالي: الفرض الجدلي خاطئ وبالتالي
$W_1 \subseteq W_2$, $W_2 \subseteq W_1$

-٤-