2) مناقشة النمط الثاني: عدة قنوات خدمة.

لهذا النظام تطبيقات كثيرة منها: محطة وقود، سوق مركزي، مصرف
أكثر من صندوق للدفع، مكتب شركة طيران، ويوجد أكثر من فئة للحجز
نميز حالتين:

1- مراكز خدمة يكون زبائنها غير محدودة المصدر مثل: محطة وقود أو سوق مركزي

2- مراكز خدمة يكون زبائنها محدودة المصدر مثل: منتجات مصنع (هنا الوحدات عبارة عن منتجات وليس زبائن)

الحالة الأولى:

مراكز خدمة زبائنها غير محدودة المصدر،

نفرض وصول الزبائن وفق توزيع احتمالي بمعدل $\frac{1}{\lambda}$ وحدة زمنية بين وصول زبون وآخر.

ونفرض أن الخدمة في جميع القنوات متماثلة من حيث الأداء والكفاءة وكل قناة تقدم خدمة بمعدل $\frac{1}{\mu}$ حسب توزيع احتمالي مناسب مثلاً الحالة المعطاة.

نفرض أن c عدد قنوات الخدمة.

وليكن n عدد الزبائن في النظام.

نفرض أن معدل الوصول هو λ ، ومعدل الخدمة μ في عدد القنوات

عندها يكون لدينا ما يلي: $\lambda_0=\lambda$ ، $\lambda_1=\lambda$ ، $\lambda_2=\lambda$ ، ... ، $\lambda_{n-1}=\lambda$.

عدد الزبائن في النظام ...: $n = 0, 1, 2, \ldots$

ملاحظة: معدل الوصول ليس له علاقة بالزبائن الموجودين في النظام.

ملاحظة: معدل الخدمة تبدأ عند وصول أول زبون.

معدل وصول أول زبون يذهب إلى أي قناة خدمة تشغيل ما يلي عقت

في حال وجود زبون : $u_1 = u$

في حال وجود زبونين : $u_2 = 2u$

في حال وجود ٣ زبائن : $u_3 = 3u$

$\vdots$

$u_{(c-1)} = (c-1)u$

$u_c = cu$

حسب مفهوم قناة خدمة واحدة وطابور واحد ، الاحتمال يكون :

$P_1 = \left(\frac{\lambda}{u}\right) P_0$

$\vdots$

$P_n = \left(\frac{\lambda}{u}\right)^n P_0$

أما في حالة عدة قنوات خدمة وطابور واحد يكون الاحتمال :

$P_n = \left(\frac{\lambda_0}{u_1}\right)\left(\frac{\lambda_1}{u_2}\right) \cdots \left(\frac{\lambda_{n-1}}{u_{n-1}}\right) P_0$

نحن نعلم أن : $\lambda_{i-1} = \lambda$; $i = 1:n-1$

ونعلم أن : $u_i = iu$; $i = 1:n$

نعوض بالعلاقات السابقة فيكون لدينا :

$P_n = \left(\frac{\lambda}{u}\right)\left(\frac{\lambda}{2u}\right) \cdots \left(\frac{\lambda}{nu}\right) P_0$

$P_n = \left(\frac{\lambda}{u}\right)^n \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n}\right) P_0$

$P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{u}\right)^n P_0$

وبما أن مجموع الاحتمالات = 1 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1\right)$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

وعنا $\Leftarrow \varphi = \frac{\lambda}{\mu}$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\varphi^n P_0 \quad , \quad 0 < \varphi < 1$$

نعوض بالقيم $\Leftarrow$

$$P_0 + \varphi P_0 + \frac{1}{2!} P_0 + \dots + \frac{1}{c!}\varphi^c P_0 = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\varphi^n P_0 = P_0\Big[\underbrace{1+\varphi+\frac{\varphi^2}{2}+\dots+\frac{\varphi^c}{c!}}_{part_1} + \underbrace{\frac{\varphi^{c+1}}{(c+1)!}+\dots}_{part_2}\Big] = 1$$

إن هذه المتسلسلة هي متسلسلة هندسية نقسمها لجزئين:

part 1: $1+\varphi+\frac{\varphi^2}{2}+\dots+\frac{\varphi^c}{c!}$

part 2: $\frac{\varphi^{c+1}}{(c+1)!} + \frac{\varphi^{c+2}}{(c+2)!} + \dots \Rightarrow$

الحاصل من الجزء الثاني:

$$\frac{\varphi \cdot \varphi^c}{c\,c!} + \frac{\varphi^2 \varphi^c}{c^2 c!} + \dots \Rightarrow$$

$$\frac{\varphi^{c+1}}{c\,c!}\left[1 + \frac{\varphi}{c} + \frac{\varphi^2}{c^2} + \dots\right]$$

بما أن $\varphi < 1 \Leftarrow$ $\quad \varphi = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \Rightarrow \frac{\varphi}{c} < 1$

$$\Rightarrow 1 + \frac{\varphi}{c} + \frac{\varphi^2}{2} + \dots = \frac{1}{1-\frac{\varphi}{c}}$$

$$part_2 = \frac{\varphi^{c+1}}{c\,c!}\left[\frac{1}{1-\frac{\varphi}{c}}\right]$$

نعوض الجزء الأول والثاني بما سبق ذكرهما

ملاحظة:

إن $(c+1)! = (c+1)\,c!$

وبالتالي:

$$\frac{1}{(c+1)!} + \frac{1}{(c+2)!} + \dots$$

بما أن $(c+1)! = (c+1)\,c! = c\,c! + c!$

$(c+2)! = (c+2)(c+1)\,c! = (c^2+3c+2)\,c!$

أي بالتعويض:

$$\frac{1}{c\,c! + c!} + \frac{1}{(c^2+3c+2)\,c!} + \frac{1}{\dots}$$

تهمل   تهمل

فلكننا في التطبيقات الواقعية نأخذ فقط أكبر أس ونهمل الباقي لذلك كان لدينا $(c+1)! = c\,c!$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \varphi^n P_0 = P_0 \left[\underbrace{\left[\frac{\varphi^{c+1}}{c\,c!} \left[\frac{1}{1-\frac{\varphi}{c}} \right] \right]}_{\text{الجزء الثاني}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{c} \frac{\varphi^n}{n!}}_{\text{الجزء الأول}} \right] = 1$$

وبالتالي تكون P_0 عالة المعدلات المتعددة - لدي :

$$P_0 = \frac{1}{\frac{\varphi^{c+1}}{c\,c!}\left(\frac{1}{1-\frac{\varphi}{c}}\right) + \sum_{n=0}^{c} \frac{\varphi^n}{n!}}$$

حظيفة :

أوجد ومنه ما سبقه :

١- العلاقة التي تمكن من حساب L_q عدد الزبائن في صف الانتظار.

٢- العلاقة التي تمكن من حساب متوسط عدد الوحدات في النظام.

٣- العلاقة التي تمكن منه حساب متوسط عدد الوحدات في صف الانتظار.

٤- العلاقة التي تمكن منه حساب الزمن المتوقع للانتظار والزمن المتوقع للخدمة.

ملاحظة: من (الوحدات) يعني عالة أي الزبائن وقد تكون بضاعة أو حسب المسألة المعطاة.

١- $$L_q = \left(\frac{\varphi^c}{c!}\right)\left(\frac{\varphi}{c}\right)\left(\frac{1}{\left(1-\frac{\varphi}{c}\right)^2}\right) P_0$$

- العلاقة التي تربط بين متوسط عدد الزبائن في النظام ومتوسط زمن الانتظار

$$L_s = \lambda\, w_s$$

- العلاقة التي تربط بين متوسط عدد الزبائن في صف الانتظار ومتوسط زمن الانتظار

$$L_q = \lambda\, w_q$$

الزمن المتوقع للانتظار في صف الانتظار + الزمن المتوقع للخدمة يعطي متوسط عدد الزبائن في صف الانتظار

$$\lambda\, w_s = \lambda\, w_q + \frac{\lambda}{\mu} \Leftarrow w_s = w_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L_s = L_q + \varphi$$

إن للمقادير L_s ، w_s ، L_q ، w_q مرتبطة فيما بينها بحيث بإيجاد أحدها يمكن معرفة البقية.

مثال: لدى مركز صيانة هاتف ثلاث خطوط هاتف

تصل الزبائن إلى مركز الصيانة عشوائياً حسب توزيع بواسون بمعدل 12

في الساعة، زمن المكالمة متغير عشوائي تختلف من زبون لآخر

ويكون حسب التوزيع الأسي بمعدل 10 دقائق لكل مكالمة، والمطلوب:

1- احسب متوسط عدد الزبائن في النظام (مركز الخدمة) L_s.

2- احسب متوسط زمن الانتظار في صف الانتظار W_q

3- أوجد احتمال وجود خط شاغر (جاهز للاستخدام)

4- أوجد احتمال وجود خط واحد على الأقل جاهز للاستخدام.

الحل:

معدل الوصول: $\lambda = 12$ ، $c = 3$ عدد قنوات الخدمة

معدل الخدمة: $\mu = \frac{60}{10} = 6$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{12}{6} = 2$$

1) متوسط عدد الزبائن في مركز الخدمة:

$$L_s = L_q + \varphi$$

$$L_q = P_0 \frac{\varphi^{c+1}}{c\,c!}\left(\frac{1}{(1-\frac{\varphi}{c})^2}\right)$$

$$\frac{\varphi^{c+1}}{c\,c!}\left(\frac{1}{(1-\frac{\varphi}{c})^2}\right) = \frac{2^4}{3\,3!}\left(\frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2}\right) = 8$$

$$\Rightarrow L_q = 8P_0$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c}\frac{\varphi^n}{n!} + \frac{\varphi^{c+1}}{(c-\varphi)c!}}$$

$$\sum_{n=0}^{c}\frac{\varphi^n}{n!} + \frac{\varphi^{c+1}}{(c-\varphi)c!} = \sum_{n=0}^{3}\frac{2^n}{n!} + \frac{2^4}{(3-2)\,3!}$$

$$= \frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{3!} = 9$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{1}{9}$$

$$L_q = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow L_s = \frac{8}{9} + 2 = \frac{26}{9}$$

② متوسط زمن الانتظار :

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{8}{9}}{12} = \frac{2}{27}$$

③ عند عدم وجود أي زبون يكون 3 خطوط من أصل 3 جاهزة للاستخدام

عند وجود زبون واحد يكون 2 خط من أصل 3 جاهز للاستخدام

عند وجود زبونين يكون 1 خط من أصل 3 جاهز للاستخدام

وفي حال وجود عدد زبائن أكثر من ذلك فستكون كل الخطوط مشغولة

وبالتالي يكون احتمال وجود خط جاهز للاستخدام هو :

$$P = 1 \cdot P_0 + \frac{2}{3} P_1 + \frac{1}{3} P_2$$

$$P_1 = P_0 \varphi = \frac{1}{9} \cdot 2 = \frac{2}{9} \quad , \quad P_2 = P_0 \frac{\varphi^2}{2!} = \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{2} = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow P = 1 \cdot \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

④ عند عدم وجود أي زبون يوجد خط واحد على الأقل جاهز للاستخدام

عند وجود زبون واحد يوجد خط واحد على الأقل جاهز للاستخدام

عند وجود زبونين يوجد خط واحد على الأقل جاهز للاستخدام

وفيما عدا ذلك لن يتحقق وجود خط واحد على الأقل جاهز للاستخدام.

$$P' = 1 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2 = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

ملاحظة: المحاضر حل الطلب الأول فقط.

انتهت المحاضرة