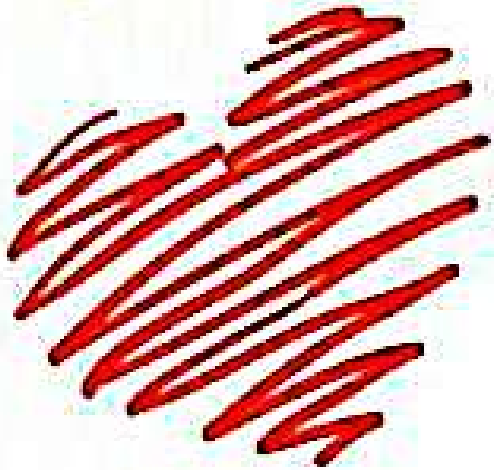


نظريّة

الاحتمالات

1 2  
3 4  
5 6  
7 8  
9



## مراجعة 19

مثال: ليكن  $X$  و  $Y$  متغيرين عشوائيين لهما دالة الكثافة المشتركة

$$P(x, y) = \begin{cases} 6xy(2-x-y) & ; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{فلا من ذلك} \end{cases}$$

عينة  $P(x, y)$  و  $cov(x, y)$

الحل: أولاً نحتاج لحساب دوال الكثافة الهامشية

$$P_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) dy$$

$$= \int_0^1 6xy(2-x-y) dy$$

$$= 6 \int_0^1 (2xy - x^2y - xy^2) dy$$

$$= 6 \left[ xy^2 - \frac{x^2y^2}{2} - \frac{xy^3}{3} \right]_0^1$$

$$= 6 \left( x - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} \right) = 4x - 3x^2$$

$$\Rightarrow P_x(x) = \begin{cases} x(4-3x) & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{فلا من ذلك} \end{cases}$$

$$P_y(y) = \begin{cases} y(4-3y) & ; 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{فلا من ذلك} \end{cases}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x P_x(x) dx = \int_0^1 x(x(4-3x)) dx$$

$$= \int_0^1 (4x^2 - 3x^3) dx = \left[ \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12}$$

$$E X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx$$

$$= \int_0^1 x^2 (x(4-3x)) dx$$

$$= \int_0^1 (4x^3 - 3x^4) dx$$

$$= \left[ x^4 - \frac{3x^5}{5} \right]_0^1 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$V(X) = E X^2 - (E X)^2$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{49}{144} = \frac{43}{720}$$

$$E(Y) = \frac{7}{12}$$

$$E Y^2 = \frac{2}{5}$$

$$V(Y) = \frac{43}{720}$$

$$E(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 xy (6xy(2-x-y)) dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 xy (6xy(2-x-y)) dx dy$$

$$= 6 \int_0^1 \int_0^1 (2x^2 y^2 - x^3 y^2 - x^2 y^3) dx dy$$

$$= 6 \int_0^1 \left[ \frac{2x^3 y^2}{3} - \frac{x^4 y^2}{4} - \frac{x^3 y^3}{3} \right]_0^1 dy$$

$$= 6 \int_0^1 \left( \frac{2}{3} y^2 - \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right) dy$$

$$= 6 \left[ \frac{2}{9} y^3 - \frac{y^3}{12} - \frac{y^4}{12} \right]'$$

$$= 6 \left( \frac{2}{9} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} \right) = \frac{12}{9} - 1 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{cov}(X, Y) = E(XY) - E X E Y$$

$$= \frac{1}{3} - \left( \frac{7}{12} \right) \left( \frac{7}{12} \right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{49}{144} = \boxed{\frac{-1}{144}} \neq 0$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \sqrt{V(Y)}} \quad \text{و منه نجد أن:}$$

$$= \frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{43}{720}} \sqrt{\frac{43}{720}}} = -\frac{5}{43}$$

وبالتالي بما أن  $\rho(X, Y) \neq 0$  فإن  $X$  و  $Y$  غير مستقلين حتماً.