نظرية الاحتمالات

محاضرة 19 / /

مثال: ليكن X , Y متغيرين عشوائيين لهما دالة الكثافة المشتركة

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6xy(2-x-y) & ; 0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le 1 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عيّن $cov(X,Y)$ و $\rho(X,Y)$

الحل: أولاً نحتاج لحساب دوال الكثافة الهامشية

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$= \int_0^1 6xy(2-x-y)\,dy$$

$$= 6\int_0^1 (2xy - x^2y - xy^2)\,dy$$

$$= 6\left[xy^2 - \frac{x^2y^2}{2} - \frac{xy^3}{3}\right]_0^1$$

$$= 6\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\right) = 4x - 3x^2$$

$0 \le x \le 1$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} x(4-3x) & ; 0 \le x \le 1 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

بالمثل نجد أن:

$$f_Y(y) = \begin{cases} y(4-3y) & ; 0 \le y \le 1 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x(x(4-3x))\,dx$$

$$= \int_0^1 (4x^2 - 3x^3)\,dx = \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{3x^4}{4}\right] = \frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12}$$

$$E X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 x^2(x(4-3x))\, dx$$

$$= \int_0^1 (4x^3 - 3x^4)\, dx$$

$$= \left[x^4 - \frac{3x^5}{5} \right]_0^1 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$V(X) = E X^2 - (E X)^2$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{49}{144} = \frac{43}{720}$$

$E(Y) = \frac{7}{12}$ بالمثل نجد أن :

$$E Y^2 = \frac{2}{5}$$

$$V(Y) = \frac{43}{720}$$

$$E(X.Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 xy\, 6xy(2-x-y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 xy\, 6xy(2-x-y)\, dx\, dy$$

$$= 6\int_0^1\int_0^1 (2x^2y^2 - x^3y^2 - x^2y^3)\, dx\, dy$$

$$= 6\int_0^1 \left[\frac{2x^3y^2}{3} - \frac{x^4}{4}y^2 - \frac{x^3}{3}y^3 \right]_0^1 dy$$

$$= 6\int_0^1 \left(\frac{2}{3}y^2 - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right) dy$$

/ /

$$= 6\left[\frac{2}{9} y^3 - \frac{y^3}{12} - \frac{y^4}{12} \right]_0^1$$

$$= 6\left(\frac{2}{9} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} \right) = \frac{12}{9} - 1 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - EX\, EY$$

$$= \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12}\right)\left(\frac{7}{12}\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{49}{144} = \boxed{-\frac{1}{144}} \neq 0$$

ومنه نجد أن:

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{43}{720}}\sqrt{\frac{43}{720}}} = -\frac{5}{43}$$

وبالتالي بما أن $\rho(X, Y) \neq 0$ فإن X و Y غير مستقلين عشوائياً.