التحليل العددي ا

الدكتورة: رشا بعاج

المحاضرة : الرابعة عشر

التاريخ : ٢٠١٦/١٢/٧

إعداد : محمد فليون && عبد الرحمن البحش

حل تمرين الوظيفة للمحاضرة السابقة:

أوجد قيمة التكامل التالي باستخدام طريقة سيمبسون وشبه المنحرف واحسب الخطأ المرتكب: $\int_2^4 ln(1+2x)\,.dx$

الحل: أولاً: إيجاد التكامل باستخدام طريقة "شبه المنحرف "

١- نحدد الدالة: $f(x) = ln(1+2x)$

٢- نوجد قيم $f(x_i)$ حيث أن قيم x_i حدود التكامل ذاتها أي $x_0 = 2$ و$x_1 = 4$:

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = 2$	$f(2) = 1.60943$
$x_1 = 4$	$f(4) = 2.19722$

٣- نوجد h :

$$h = |b-a| = |4-2| = 2$$

٤- نطبّق قانون شبه المنحرف:

$$I = \frac{h}{2}[y_0 + y_1] = \frac{2}{2}[1.60943 + 2.19722] \approx 3.80662$$

٥- حساب الخطأ المرتكب:

$$E = \frac{h^3}{12}\left|f^{(2)}(\theta)\right|$$

نوجد $f^{(2)}(\theta)$:

$$f(x) = ln(1+2x) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{1+2x} \Rightarrow f''(x) = \frac{-4}{(1+2x)^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(2)^3}{12}\left|\frac{-4}{(1+2x)^2}\right| = \frac{8}{12}\left|\frac{-4}{\left(1+2(2)\right)^2}\right| = 0.66666\left(\frac{4}{25}\right) = 0.10667$$

حيث أننا عوضنا $x = 2$ لأنها تعطي أعظم قيمة للمشتق.

ثانياً: إيجاد التكامل باستخدام طريقة "سيمبسون "

٣- نوجد قيم $f(x_i)$ حيث أن قيم x_i حدود التكامل ذاتها أي $x_0 = 2$ و$x_1 = 4$:

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = a = 2$	$f(2) = 1.60943$
$x = \frac{b+a}{2} = 3$	$f(3) = 1.94591$
$x_1 = b = 4$	$f(4) = 2.19722$

٤- نطبق قانون سيمبسون:

$$I = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]$$
$$= \frac{1}{3}[1.60943 + 4(1.94591) + 2.19722]$$
$$\approx 3.86343$$

٥- حساب قيمة الخطأ المرتكب:

$$E = \frac{h^5}{90}\left|f^{(4)}(\theta)\right|$$

نوجد $f^{(4)}(\theta)$: حيث لدينا :

$$f''(x) = \frac{-4}{(1+2x)^2}$$

$$\Rightarrow \; f'''(x) = \frac{-2(4)(1+2x)}{(1+2x)^4} = \frac{-8}{(1+2x)^3}$$

$$\Rightarrow \; f^{(4)}(x) = \frac{2(-4)(1+2x)^4 - 4(4)(1+2x)^3}{(1+2x)^8}$$
$$= \frac{-8(1+2x)^4 - 16(1+2x)^3}{(1+2x)^8}$$

$$\Rightarrow \; f^{(4)}(x) = \frac{-24}{(1+2x)^4}$$

لمعرفة θ والتي هي القيمة التي تعطي المشتق قيمة أعظمية يجب أن ندرس التابع لكن إذا كان التابع معقد يمكن أن نعوّض أطراف التكامل بالمشتق أي نعوض بداية المجال ونهاية المجال والقيمة التي تعطي المشتق أكبر قيمة منهما نعتبرها هي القيمة المطلوبة (وهذا الكلام صحيح في هذا المقرّر فقط).

$$E = \frac{1}{90}\left|\frac{-24}{(1+2(2))^4}\right|$$
$$= \frac{1}{90}.\frac{24}{625} = 0.00042$$

ملاحظة قمنا باقتطاع الارقام العشرية عند المنزلة الخامسة وعند الامتحان تحدد لنا الدكتورة مرتبة الاقتطاع.

سنبدأ محاضرتنا بفكرة

التفاضل العددي

يعرف التفاضل العددي بأنه اجرائية عددية لحساب قيمة المشتق لدالة ما عند نقاط محدودة

لدينا الدّالة f نريد أن نحسب مشتق هذه الدالة عند نقطة مفروضة ولتكن (x_0)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

حيث (h) هي المسافة بين نقطتين

لإيجاد قيمة تقريبية لهذا المقدار نقوم بما يلي :

بفرض $f \in c^2[0,1]$, $x \in [a,b]$

حيث f دالة مستمرة ومشتقة مرتين

نختار نقطة $x_1 = x_0 + h$

بحيث تكون $h \neq 0$, $x_1 \in [a,b]$ عندئذ

$$f(x) = f_1(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}.f''(x)$$

$$f(x) = \frac{f(x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + \frac{f(x_1)(x-x_0)}{(x_1-x_0)} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}.f''(\theta_x)$$

نشتق العلاقة بالنسبة ل x

$$f'(x)=\frac{f(x_0)}{-h}+\frac{f(x_0+h)}{h}+\frac{2(x-x_0)}{2!}f''(\theta_x)+\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2!}D_x[f''(\theta_x)]$$

لكن $D_x[f''(\theta_x)]$ لا يمكن تحديده وإيجاده لذلك نلجأ لجعل الأمثال المضروبة به صفر وذلك بتعويض $x=x_0$ فنجد:

$$f'(x)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{h}{2}f''(\theta_x)$$

فإذا كان

$$f''(\theta_x)<M \qquad ; \qquad \forall\, x\in[a,b]$$

عندئذ يمكننا أن نكتب

$$|f'(x_0)-\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}|\le\frac{M|h|}{2}$$

وفيما يلي نورد جدولاً يحوي قوانين لإيجاد المشتق وذلك تبعاً لعدد النقاط علماً أنّ المعطيات وشكل المسألة يدلّك على معرفة القانون السليم، وكلّ شيء سيتوضح بالأمثلة

عدد النقاط	قانون المشتق $f'(x)$	الخطأ
2	تقدمية $f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	$E=\left\|\frac{h}{2}f''(\theta_x)\right\|$
2	تراجعية $f'(x_0)=\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$	$E=\left\|\frac{h}{2}f''(\theta_x)\right\|$
3	تقدمية $f'(x_0)=\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h)]$	$E=\left\|\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_x)\right\|$
3	مركزية $f'(x_0)=\frac{1}{2h}[-f(x_0-h)+f(x_0+h]$	$E=\left\|\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\theta_x)\right\|$
3	تراجعية $f'(x_0)=\frac{1}{2h}[f(x_0-2h)-4f(x_0-h)+3f(x_0)]$	$E=\left\|\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_x)\right\|$

$E = \left\lvert \frac{h^4}{5} f^{(5)}(\theta_x) \right\rvert$	مركزية $f'(x_0) = \frac{1}{12h}[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)]$	5
$E = \left\lvert \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\theta_x) \right\rvert$	تقدّمية $f'(x_0) = \frac{1}{12h}[-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)]$	5

مثال: أوجد المشتق للدّالة f عند $x_0 = 0.2$ علماً أنَّ:

x_i	0.1	0.2	0.4
$f(x_i)$	2.11	3.04	5.12

الحل: لدينا:

$h_1 = 0.4 - 0.2 = 0.2$

$h_2 = 0.2 - 0.1 = 0.1$

يلاحظ أنَّ النّقاط ليست متساوية البعد لذلك لا نطبّق قانون مشتق الدّالة عند ثلاث نقاط

لذلك نلجأ لقانون الاشتقاق الّذي يحوي نقطتين

وهنا لدينا المشتق المطلوب عندما $x = 0.2$ ومنه فسوف نعتبر النقطتان هما:

$x_0 = 0.2 \quad , \quad x_1 = x_0 + h = 0.2 + 0.2 = 0.4 \quad ; h = 0.2$

نطبّق قانون التقدّميّة لنقطتين لأنّنا أخذنا النّقطة الّتي تليها...

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{5.12 - 3.04}{0.2} = 10.4$$

ثمَّ نعتبر النقطتان هما:

$x_0 = 0.2 \quad , \quad x_1 = x_0 - h = 0.2 - 0.1 = 0.4 \quad ; h = 0.1$

نطبّق قانون التّراجعيّة لنقطتين لأنّنا أخذنا النّقطة الّتي قبلها...

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} = \frac{3.04 - 2.11}{0.1} = 9.3$$

تنويه: " في مثل هذا السؤال لن يطلب حساب قيمة الخطأ لأنّه لم يعطى f بنص السؤال "

ملاحظات هامة:

- **في حال كانت النقاط متساوية البعد:**

١) ننتبه على مكان وجود النّقطة المطلوب حساب المشتق عندها.
٢) فلو كانت النقطة المطلوب حساب المشتق عندها هي 0.2 وهي في المنتصف عندئذٍ نطبّق قانون المركزية لثلاث نقاط.
٣) ولو كانت النقطة المطلوب حساب المشتق عندها هي 0.1 وهي أوّل نقطة نطبّق قانون التقدّميّة لثلاث نقاط.
٤) أمّا إذا كانت النقطة المطلوب حساب المشتق عندها هي 0.4 وهي آخر نقطة نطبّق قانون التّراجعيّة لثلاث نقاط.

- **في حال كانت النقاط غير متساوية البعد مثل مثالنا هذا:**

١) ننتبه على مكان وجود النقطة المطلوب حساب المشتق عندها لمعرفة استخدام القوانين المناسبة لهذه الحالة...
٢) نقسّم النقاط الثلاث إلى نقطتين ونطبّق عليهم قانون مناسب لهم علماً أنَّ النَّقطة المطلوب حساب المشتق عندها هي أحد النقاط والنّقطة الثانية إحدى النقطتين الثانيتين.
٣) فمثلاً في المثال السابق كانت النقطة المطلوب حساب المشتق عندها هي في المنتصف فبذلك نقسّم النّقط الثلاثة إلى $x_0 , x_0 + h_2$ ونطبّق عليهم قانون التقدّمية لأنّنا أخذنا النقطة المطلوب حساب المشتق عندها والنّقطة الّتي تليها، ثم نقسّم النّقط الثلاثة إلى $x_0 , x_0 - h_1$ ونطبّق عليهم قانون التراجعيّة لأنّنا أخذنا النقطة المطلوب حساب المشتق عندها والنّقطة الّتي قبلها $\underbrace{0.1 \quad 0.2}_{h_1}\!\!\!\underbrace{\quad\quad 0.4}_{h_2}$
٤) وإذا كانت النقطة المطلوب حساب المشتق عندها هي 0.1 وهي أوّل نقطة نقسّم النقاط إلى $x_0 = 0.1 , x_0 + h_1 = 0.2$ ثمّ نطبّق قانون التقدّميّة لأنّنا أخذنا النّقطة المطلوب حساب المشتق عندها والنّقطة الّتي تليها، ثمّ نقسّم النقاط إلى: $x_0 = 0.1 , x_0 + h_2 = 0.4$ ثمّ نطبّق قانون التقدّميّة لأنّنا أخذنا النّقطة المطلوب حساب المشتق عندها والنّقطة الّتي تليها.

٥) إذا كانت النقطة المطلوب حساب المشتق عندها هي 0.4 وهي آخر نقطة نقسّم النقاط إلى: $x_0 = 0.4\ ,\ x_0 - h_2 = 0.2$ ثمّ نطبّق عليها قانون التراجعيّة لأنّنا أخذنا النقطة المطلوب حساب المشتق عندها والنّقطة الّتي قبلها، ثمّ نقسّم النقاط إلى: $x_0 = 0.4\ ,\ x_0 - h_1 = 0.1$ ثمّ نطبّق عليها قانون التراجعيّة لأنّنا أخذنا النقطة المطلوب حساب المشتق عندها والنّقطة الّتي قبلها.

مثال آخر: استخدم أفضل الصّيغ لإتمام الجدول التالي:

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0.1	2.11	
0.2	3.56	
0.3	1.02	

نستخدم ثلاث نقاط للصيغة التقدمية والمركزية والتراجعية

الحل:

نلاحظ أن النقاط الثلاث متساوية البعد $h = x - x_0 = x_2 - x_1 = 0.1$

نطبّق القوانين الّتي تحوي ثلاث نقاط لأنَّ النقاط متساوية البعد.

❖ لنوجد المشتق عند $x_0 = 0.1$:

نلاحظ أنّ 0.1 هي أوّل نقطة أي سنطبّق قانون التقدّميّة لثلاث نقط

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h]$$

$$\Rightarrow f'(0.1) = \frac{1}{2(0.1)}[-3(2.11) + 4(3.56) - 1.02] = 34.45$$

❖ لنوجد المشتق عند $x_0 = 0.2$:

نلاحظ أنّ 0.2 هي نقطة المنتصف(المركز) أي سنطبّق عليها قانون المركزية لثلاث نقط

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-f(x_0 - h) + f(x_0 + h)]$$

$$\Rightarrow f'(0.2) = \frac{1}{2(0.1)}[-(2.11) + 1.02] = -5.45$$

❖ لنوجد المشتق عند $x_0 = 0.3$:

نلاحظ أنّ 0.3 هي آخر نقطة أي سنطبّق عليها قانون التراجعيّة لثلاث نقط

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0)]$$

$$\Rightarrow f'(0.3) = \frac{1}{2(0.1)}[(2.11) - 4(3.56) + 3(1.02)] = -45.35$$

في الحقيقة يجب دراسة أخطاء التدوير مع كل بحث من الأبحاث المدروسة (إيجاد الجذور _ الاستيفاء _ التّكامل _ الاشتقاق) إلّا أنّه لم يكن هناك أيّ تأثير لأخطاء التدوير على هذه الأبحاث عدا بحث الاشتقاق لذلك سندرس تأثير خطأ التدوير على حساب المشتق العددي من أجل الصّيغة المركزيّة للمشتق عند نقطة مع ثلاث نقاط.

استنتج حساب خطأ التدوير على صيغة المشتق من أجل ثلاث نقاط في الصيغة المركزيّة:

إنّ قيمة المشتق في الصّيغة المركزيّة لثلاث نقاط هي:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[-f(x_0 - h) + f(x_0 + h)]$$

حيث:

$$\begin{cases} f(x_0 + h) \approx \underbrace{\tilde{f}(x_0 + h)}_{\text{القيمة التقريبة}} + \underbrace{e(x_0 + h)}_{\text{خطأ التدوير}} \dots (1) \\ f(x_0 - h) \approx \underbrace{\tilde{f}(x_0 - h)}_{\text{القيمة التقريبة}} + \underbrace{e(x_0 - h)}_{\text{خطأ التدوير}} \dots (2) \end{cases}$$

فيكون الخطأ الكلّي المرتكب $e(h)$ هو:

$$e(h) = \left| f'(x_0) - \frac{1}{2h}[-f(x_0 - h) + f(x_0 + h)] \right|$$

حيث: $f'(x_0)$ هي القيمة الفعليّة للمشتق.

و: $\frac{1}{2h}[-f(x_0-h)+f(x_0+h)]$ هي القيمة التقريبية للمشتق.

بتعويض (1) و (2) والإصلاح نجد:

$$e(h)=\left|\frac{e(x_0+h)-e(x_0-h)}{2h}\right|-\underbrace{\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\theta)}_{\text{الخطأ الناتج عن الاقتطاع}}$$

وبحيث أننا فرضنا أنّه: $\begin{cases}|e(x_0\pm h)|\le\varepsilon\\ \left|f^{(3)}(\theta)\right|\le M\end{cases}$ نعوّض:

$$e(h)=\left|\frac{\varepsilon-\varepsilon}{2h}\right|-\frac{h^2}{6}.M$$

باستخدام خواص القيمة المطلقة يمكن أن نكتب:

$$e(h)=\frac{|\varepsilon-\varepsilon|}{|2h|}-\frac{h^2}{6}.M=\frac{|\varepsilon|+|-\varepsilon|}{|2h|}-\frac{h^2}{6}.M$$

أي:

$$e(h)=\frac{|\varepsilon|+|\varepsilon|}{|2h|}-\frac{h^2}{6}.M=\frac{2\varepsilon}{2h}-\frac{h^2}{6}.M$$

$$\Rightarrow \boxed{e(h)=\frac{\varepsilon}{h}+\frac{h^2}{6}.M \Rightarrow \text{للحفظ}}$$

وهو تابع الخطأ الكلي عند الصيغة المركزيّة...

وعندئذٍ تعطى الصيغة المثلى لـ h بالعلاقة:

$$\boxed{h=\sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}} \Rightarrow \text{للحفظ}}$$

ومنه نستنتج أنّه إذا طُلِب إيجاد الخطأ الكلي للصيغة **المركزيّة**، أو طلب إيجاد الـ h المثلى من أجل الخطأ المرتكب في حساب المشتق عند النقطة x_0 في الصيغة **المركزيّة** من أجل ثلاث نقاط نكتفي بالتعويض في القوانين المذكورة أعلاه (من دون الاستنتاج).

تمرين (وظيفة)

أوجد مشتق الدّالة $f(x) = e^{-x} . \sin x$ عند النقطة: $x = 1.0$ من أجل: $h = 0.5$

باستخدام ثلاث نقاط بالصّيغة التقدّميّة والمركزيّة والتراجعيّة واحسب الخطأ الأعظمي المرتكب

"مع تحيات فريق سيريا ماث التطوعي"

" انتهت المحاضرة "