البنى الجبرية 1

الدكتور : حمزة الحاكمي

المحاضرة : الثالثة والعشرون

التاريخ : ١٢/١٢/٢٠١٦

إعداد : أحمد أبو التوت

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

الــP – زمر

تعريف : نقول عن الزمرة المنتهية G إنها P – زمرة

اذا كان $(G:1)=P^n$

حيث : $0\le n \epsilon Z$ و P عدد أولي .

مثال :

$$(G:1)=25=5^2$$

G هي $5-$ زمرة

$$U(10)=\{1,3,7,9\}=2^2$$

$U(10)$هي $2-$ زمرة .

$$U(8)=\{1,3,5,7\}=2^2$$

$U(8)$هي $2-$ زمرة .

مبرهنة :

لتكن G زمرة منتهية إذا كانت G هي $P-$ زمرة عندئذ :

$$z(G)\neq <e>$$

Syria Math

الاثبات :

لنفرض أن $(G:1)=P^n$ حيث أن P عدد اولي و $0\le n \epsilon Z$.

ولدينا حسب **علاقة الصفوف** :

$$(G:1)=(z(G):1)+\sum_{a\notin Z(G)}(G:c(a))$$

وحسب لاغرانج فإن $(c(a):1)$ تقسم P^n ومنه $(c(a):1)=P^t$ بحيث $n>t$ ومنه فإن المجموع $\sum(G:c(a))$ يقبل القسمة على P وأن

$$(z(G):1)=(G:1)-\sum(G:c(a))$$

$$(z(G):1) = \underbrace{P^n}_{p\ \text{يقبل القسمة على}} - \underbrace{\sum (G:c(a))}_{p\ \text{يقبل القسمة على}}$$

وهكذا نجد ان $z(G)$ زمرة تبديلية منتهية ومرتبتها تقبل القسمة على P وبالتالي فهي تحوي عنصر مرتبته P ومنه :

$$z(G) \neq < e >$$

مبرهنة : لتكن G زمرة بحيث $(G:1) = P^2$ فإن الزمرة G تكون تبديلية .

الاثبات : $(Z(G):1) \in \{1, P, P^2\}$ (وذلك حسب لاغرانج)

لنفرض أن G زمرة منتهية وأن $(G:1) = P^2$ وحسب المبرهنة السابقة إذا كانت G عبارة عن $P-$ زمرة عندئذ : $Z(G) \neq < e >$ وبالتالي $(Z(G):1) \neq 1$ إذن:

$$\begin{cases} (Z(G):1) = P & \text{إما} \\ (Z(G):1) = P^2 & \text{أو} \end{cases}$$

إذا كانت $(Z(G):1) = P$ عندئذ

لنأخذ زمرة الخارج $(\frac{G}{Z(G)})$ فنجد أن :

$$\left(\frac{G}{Z(G)}:1\right) = (G:Z(G)) = \frac{(G:1)}{(Z(G):1)} = \frac{P^2}{P} = P$$

ومنه نجد أن $\frac{G}{Z(G)}$ دوارة (مرتبتها عدد اولي)وحسب مبرهنة سابقة تكونG تبديلية .

إذا كانت $(Z(G):1) = P^2$ فإن $G = Z(G)$ وبالتالي فإن G تبديلية .

تمهيدية :

لتكن G عبارة عن $P-$ زمرة عندئذ :

١) كل زمرة جزئية في G هي P – زمرة .

٢) إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية في G فإن زمرة الخارج $\frac{G}{H}$ هي $P-$ زمرة .

الاثبات :

لنفرض أن $(G:1) = P^n$

١- لتكن K زمرة جزئية في G عندئذ حسب لاغرانج فإن مرتبة أي زمرة جزئية تقسم مرتبة G .

$$(G:1) = (G:K)(K:1)$$

وهذا يبين أن $(K:1)$ تقسم المقدار P^n ومنه $(K:1) = P^t$ حيث $0 \le t < n$

ومنه الزمرة الجزئية K هي $P-$ زمرة .

٢- لتكن H زمرة جزئية ناظمية في G وحسب (١) فإن H هي عبارة عن $P-$ زمرة .
لنفرض أن $(H:1) = P^k$ حيث $k < n$ وحسب لاغرانج فإن :

$$\left(\frac{G}{H}:1\right) = (G:H) = \frac{(G:1)}{(H:1)} = \frac{P^n}{P^k} = P^{n-k}$$

ومنه فإن $\frac{G}{H}$ هي أيضا $P-$ زمرة .

مبرهنة :

لتكن G زمرة منتهية ولتكن H زمرة جزئية ناظمية في G فإن الشروط الاتية متكافئة :

١) الزمرة G هي $P-$ زمرة .

٢) كل الزمر H و $\frac{G}{H}$ هي عبارة عن $P-$ زمرة .

الاثبات:

$((1 \Leftarrow 2))$ من التمهيدية السابقة .

$((2 \Leftarrow 1))$ لنفرض أن

$$(H:1) = P^n$$

$$\left(\frac{G}{H}:1\right) = P^m$$

حيث $n, n \ge 0$أعداد صحيحة ، وحسب لاغرانج فإن :

$$(G:1) = (G:H)(H:1) = \left(\frac{G}{H}:1\right)(H:1) = P^m . P^n = P^{m+n}$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة G عبارة عن $P-$ زمرة .

تمارين :

مثال : ١) هل الزمرة Z⊕Z دوارة

الحل: لنفرض جدلا أن الزمرة $Z \oplus Z$ دوارة وأن $Z \oplus Z =< (a,b) >$ حيث $a,b \in Z$

لنناقش الحالات التالية :

- اذا كان $a = b$ عندئذ $(1,2) \in Z \oplus Z$ ولكن $(1,2) \notin < (a,b) >$
- اذا كان $a \neq b$ عندئذ $(1,1) \in Z \oplus Z$ ولكن $(1,1) \notin < (a,b) >$

وفي كلتا الحالتين يعطى تناقض لأن $Z \oplus Z =< (a,b) >$ ومنه $Z \oplus Z$ ليست دوارة

مثال ٢) لنأخذ الزمرة $U(16) = \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$

$(U(16):1) = 8$

Syria Math

لنعرف العلاقة $\alpha : U(16) \longrightarrow U(16)$ بالشكل التالي

$\forall x \in U(16) \quad ; \alpha(x) = x^3$

أثبت أن α تماثل للزمرة $U(16)$.

الحل : واضح أن α تطبيق لأنه $\forall x,y \in U(16)$ بحيث $x = y$ فإنه $x^3 = y^3$ اي أنه $\alpha(x) = \alpha(y)$

و أيضاً α تشاكل لأنه $x^3 . y^3 = \alpha(x)\alpha(y)$ $\underbrace{=}_{\text{لان } U(16) \text{ تبديلية}}$ $\alpha(x.y) = (x.y)^3$

ولنبرهن أن α متباين لنفرض أن $\alpha(x) = \alpha(y)$ عندئذ $x^3 = y^3$ نضرب بمقلوب y^3

$x^3 . y^{-3} = e$

ولنفرض أن $\lambda = o(x.y^{-1})$ وواضح أن $\lambda \in \{1,3\}$

اذا كانت $\lambda = 1$ نجد أن

$$x.y^{-1} = e \Longrightarrow x = y$$

اذا كانت $\lambda = 3$ عندئذ فهي تقسم مرتبة الزمرة $U(16)$ والتي تساوي 8 وهذه غير ممكن ومنه α متباين

ولما أن $U(16)$ منتهية و α متباين نجد أن α غامر ومنه فهمي تماثل للزمرة G .

يمكن تعميم المثال السابق كتمهيدية

تمهيدية (وظيفة) : لتكن G زمرة منتهية تبديلية مرتبتها n عدد صحيح موجب يحقق $\gcd(n,m) = 1$

وأن العلاقة

$$f : G \longrightarrow G$$

المعرف بالشكل التالي $f(x) = x^m \quad ; \quad \forall x \in G$ هي تماثل للزمرة G .

البرهان بنفس طريقة المثال تماماً .

"انتهت المحاضرة"