المعادلات التفاضلية ١

الأستاذ : عبد الله المليح

المحاضرة :السادسة عملي

التاريخ : ٢٠١٦/١١/١٣

إعداد : محمد شهلا + فادي الشريطي

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

مرحبا أصدقائي سوف نكتفي بهذه المحاضرة بحل بعض التمارين عن عوامل التكميل التي تتبع ل:

١_ $z = xy$

٢_ $z = x + y$

٣_ $z = x^2 + y^2$

تمارين:

١_ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$(y^2 - x)dx + 2ydy = 0$$

الحل: لدينا $M(x,y) = y^2 - x \;\; \&\& \;\; N(x,y) = 2y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \quad \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

وبالتالي المعادلة غير تامة لنوجد الفرق ....

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2y - 0 = 2y$$

نلاحظ وضوحا أنه في حال قسمنا الفرق على N سيكون المقدار الناتج ثابت وبالتالي بإمكاننا أن نتبعه لأي عامل تكميل من الأشكال المعروفة لذلك نقسمه على N ......

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y}{2y} = 1$$

نجعل عامل التكميل يتبع ل x وبالتالي للحصول عليه نحل المعادلة

$$\frac{d\mu}{\mu} = 1\,dx \xrightarrow{\int} \ln|\mu| = x \to \mu = e^x$$

نضرب طرفي المعادلة الغير التامة بعامل التكميل

$$(y^2e^x - xe^x)dx + 2ye^x dy = 0$$

وهي معادلة تفاضلية تامة والحل العام لها من الشكل F(x,y)=c

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y) = \int (y^2e^x - xe^x)dx + \varphi(y) \rightarrow$$

$$\int xe^x dx = (x-1)e^x$$

من الدوال الشهيرة وذلك بطريقة التجزئة بفرض ما يأتي $u = x \ \ \&\& \ \ dv = e^x$

$$F(x,y) = y^2e^x - (x-1)e^x + \varphi(y)$$

نوجد المشتق الجزئي بالنسبة ل Y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2ye^x + \varphi'(y)$$

بمقارنتها مع N نجد $2ye^x + \varphi'(y) = 2ye^x \rightarrow \ \varphi'(y) = 0 \rightarrow \varphi(y) = c_1$

ومنه الحل العام هو

$$\boxed{\begin{aligned} F(x,y) &= y^2e^x - (x-1)e^x + c_1 \\ &= e^x(y^2 - x + 1) = c \rightarrow c = c_1 \end{aligned}}$$

تمرين (٢)

$$(6xy + 3y^2x + x^3)dy + 3(x^2 + y^2)dx = 0$$

الحل : لدينا ما يأتي ......

$$\boldsymbol{M(x,y) = 3(x^2 + y^2) \quad \&\& \quad N(x,y) = 6xy + 3y^2x + x^3}$$

ونلاحظ أن $\frac{\partial N}{\partial x} = 6y + 3y^2 + 3x^2 \neq +6y = \frac{\partial M}{\partial y}$ وهي غير تامة

لنوجد الفرق الآتي $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = -3(x^2+y^2)$ ونلاحظ أنه يساوي (M-) لذلك نقسم عليه

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = -\frac{3(x^2+y^2)}{-3(x^2+y^2)} = 1$$

ومنه نجعل عامل التكميل يتبع ل x ولنحل المعادلة $\frac{d\mu}{\mu} = 1dx$

بالمكاملة $\ln|\mu| = x \rightarrow \mu = e^x$

نضرب طرفي المعادلة ب e^x

$$(6xy + 3y^2x + x^3)e^x\, dy + 3e^x(x^2+y^2)dx = 0$$

تمرين(٣)

$$-y^3dx + (xy^2 - x^2)dy = 0$$

نلاحظ أن $M(x,y) = -y^3 \quad \&\& \quad N(x,y) = xy^2 - x^2$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -3y^2 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = y^2 - 2x$$

ومنه نجد أن المعادلة غير تامة والآن لنجد الفرق $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -4y^2 + 2x$

(!!!)نلاحظ أنه إذا قسمنا على M– فلن يتبع لX أو لY فقط لذلك نجرب أن نقسمه على

$yN - xM$ حيث: $yN - xM = xy^3 - x^2y + xy^3 = 2xy^3 - x^2y$

ومنه $: z = x.y$ $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM} = \frac{-4y^2+2x}{2xy^3 - x^2y} = -\frac{2(2y^2-x)}{(x.y)(2y^2-x)} = -\frac{2}{xy} = -\frac{2}{z}$

عامل التكميل يتبع ل z وبالتالي نحل المعادلة $\frac{d\mu}{\mu} = \varphi(z)dz \rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{z}dz \rightarrow \mu = \frac{1}{z^2}$

ومنه نجد $\mu = \frac{1}{x^2y^2}$ وأخيرا نضرب به طرفي المعادلة ونكمل........

تمرين (٤)

$$(4x^4y^5 + y)dx + (4x^5y^4 - x)dy = 0$$

لدينا : $M(x,y) = 4x^4y^5 + y \quad \&\& \quad N(x,y) = 4x^5y^4 - x$

وكما أنه $\frac{\partial M}{\partial y} = 20x^4y^4 + 1 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 20x^4y^4 - 1$ ومنه نجد المعادلة غير تامة

لنجد الفرق $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2$

(!!!!!!) نلاحظ إذا قسمنا على N أو على M– لن نحصل على ناتج يتبع ل x او Y فقط لذلك لنجرب أن نقسمه على المقدار : $yN - xM$

$$yN - xM = 4x^5y^5 - xy - 4x^5y^5 - xy = -2xy$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM} = \frac{2}{-2xy} = -\frac{1}{xy} = -\frac{1}{z} \quad : z = xy$$

ومنه عامل التكميل يتبع ل z فقط ونوجد من خلال حل المعادلة $\frac{d\mu}{\mu} = \varphi(z)dz$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{1}{z}dz \to \ln|\mu| = -\ln|z| = \ln\left|\frac{1}{z}\right| \to \mu = \frac{1}{xy}$$

نضرب $\mu = \frac{1}{xy}$ بطرفي المعادلة $\left(4x^4y^5 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(4x^5y^4 - \frac{1}{y}\right)dy = 0$

لتصبح تامة ونكمل لنحصل على المطلوب ....

تمرين(٥)

$$(x^2 + y^2 - 5x)dy + 5ydx = 0 \ldots\ldots(1)$$

$$M(x,y) = 5y \quad \&\& \quad N(x,y) = x^2 + y^2 - 5x$$

نلاحظ أن المعادلة غير تامة من الآتي $\frac{\partial M}{\partial y}=5\neq\frac{\partial N}{\partial x}=2x-5$

لنجد الفرق $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=10-2x$ ولنقسمه على $2xN-2yM$ حيث :

$$2xN-2yM=2x^3+2xy^2-10x^2-10y^2\rightarrow$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{2xN-2yM}=\frac{10-2x}{2x^3+2xy^2-10x^2-10y^2}=-\frac{2x-10}{(2x-10)x^2+(2x-10)y^2}$$

$$=\frac{-(2x-10)}{(2x-10)(x^2+y^2)}=-\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{1}{z}\ :z=x^2+y^2$$

ومنه نجد أن عامل التكميل يتبع ل $z=x^2+y^2$ و لإيجاده نحل المعادلة

$$\frac{d\mu}{\mu}=\varphi(z)dz$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{1}{z}dz\rightarrow\mu=\frac{1}{z}=\frac{1}{x^2+y^2}$$

نضرب طرفي المعادلة (١) بعامل التكميل لتصبح تامة ومنه

$$\left(1-\frac{5x}{x^2+y^2}\right)dy+\frac{5y}{x^2+y^2}\,dx=0$$

تمرين (٦)

$$(2x+3y)dx+(2y-3x)dy=0$$

لدينا!! $M(x,y)=2x+3y$ && $N(x,y)=2y-3x$

ونلاحظ أنه $\frac{\partial M}{\partial y}=3\neq\frac{\partial N}{\partial x}=-3$ أي المعادلة غير تامة.......

لنجد الفرق $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=6$ ولنقسم على $2xN-2yM$ حيث:

$$2xN - 2yM = 4xy - 6x^2 - 4xy - 6y^2 = -6(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{2xN - 2yM} = \frac{6}{-6(x^2 + y^2)} = -\frac{1}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{z} : z = x^2 + y^2$$

وبالتالي عامل التكميل يتبع ل $z = x^2 + y^2$ ونوجده بحل المعادلة $\frac{d\mu}{\mu} = \varphi(z)dz$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{1}{z}dz \rightarrow \mu = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

ونتابع الحل كما ورد في المثال السابق لنحصل على معادلة تامة وهو المطلوب ^_^.

تمرين(٧)

$$(x + y)dx + \frac{2xy + x^2}{y + x}dy = 0$$

لدينا $M(x, y) = (x + y)$ && $N(x, y) = \frac{2xy+x^2}{y+x}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{(2y + 2x)(y + x) - 2xy - x^2}{(y + x)^2} \xRightarrow{\text{بالإصلاح}} \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + \frac{y^2}{(x + y)^2}$$

لنجد الفرق $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{y^2}{(x+y)^2}$ ولنقسمه على (N-M) حيث:

$$N - M = \frac{2xy + x^2}{y + x} - (x + y) = -\frac{y^2}{y + x}$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N-M}=\left(\frac{-y^2}{(x+y)^2}\right)\left(-\frac{y+x}{y^2}\right)=\frac{1}{x+y}=\frac{1}{z}\ : z=x+y$$

ومنه عامل التكميل يتبع ل z=x+y لإيجاده نحل المعادلة $\frac{d\mu}{\mu}=\varphi(z)dz$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{1}{z}dz\rightarrow\ \mu=z=x+y$$

نضرب طرفي المعادلة (١) بعامل التكميل لتصبح

$$(x+y)^2dx+(2xy+x^2)dy=0$$

وهكذا تكون انتهت محاضرتنا ^_^ نرجو أن نكون قد قدمنا لكم شرحا وافياً

ونعتذر عن التأخير ......

و تجدر الإشارة إلى أنه من الأفضل لكل طالب أن يحاول بحل التمارين لمفرده و يكمل ما تركه الأستاذ كتمرين للطالب .

"انتهت المحاضرة"