بسم الله الرحمن الرحيم

مدرّس المقرّر : د. محمّد الشيخ / تاريخ المحاضرة : 7/11/2016

مراجعة :

وجدنا في المحاضرةالسابقة أنَّ:

* $G \subseteq \mathbb{C}$ غير مترابطة $\Leftrightarrow$ وجود مجموعتين A, B غير خاليتين مفتوحتين معاً (أو مغلقتين معاً) بحيث يكون: $G = A \cup B \;\; , \;\; A \cap B = \phi$

* $G \subseteq \mathbb{C}$ مترابطة $\Leftrightarrow$ عدم وجود مجموعتين A, B غير خاليتين مفتوحتين معاً (أو مغلقتين معاً) بحيث يكون : $A \cap B = \phi \;\; , \;\; G = A \cup B$

* إذا أمكن الوصل بين أي نقطتين من مجموعة $G \subseteq \mathbb{C}$ بخط مضلعي محتوى بكامله في G عندئذٍ فإنَّ: G مترابطة ، **ولكن**: العكس غير صحيح بالحالة العامة.

* إذا كانت $G \subseteq \mathbb{C}$ مفتوحة ومترابطة عندئذٍ:

يمكن الوصل بين أي نقطتين من G بخط مضلعي واقع بكامله في G .

* $G \subseteq \mathbb{C}$ محدّبة $\Leftrightarrow$ يمكن الوصل بين أيّ نقطتين منها بقطعة مستقيمة واقعة بأكملها في G .

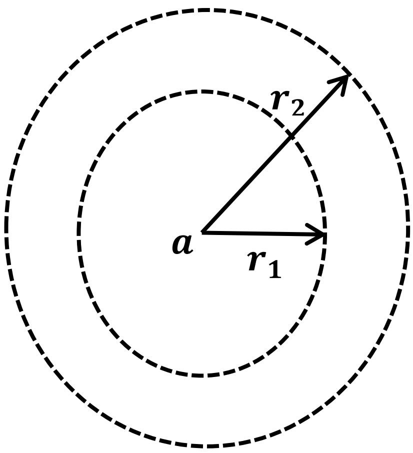
ملاحظة (تعريف المنطقة):

المنطقة هي المجموعة المفتوحة والمترابطة بآنٍ واحد.

مبرهنة (دون برهان):

كل مجموعة محدّبة هي مترابطة ، إلّا أنَّ العكس غير صحيح في الحالة العامة.

فمثلاً: إنَّ الحلقة $a_{nn}(r_1, r_2)$ هي مترابطة لكنّها غير محدّبة.



أمثلة:

* نعلم أنَّ: $\mathbb{C}$ مجموعة محدّبة وبالتالي هي مجموعة مترابطة ، وأيضاً إنَّ $\mathbb{C}$ مفتوحة ، وبالتالي فهي مجموعة مفتوحة ومترابطة معاً أي $\mathbb{C}$ منطقة.

* إنَّ الأقراص المفتوحة جميعها مناطق ، حيث إنَّ القرص المفتوح هو مجموعة مفتوحة ، ومن جهة أخرى هو مجموعة محدبة ، فهو يمثِّل مجموعة مترابطة ، وبالنتيجة فالقرص المفتوح هو منطقة.

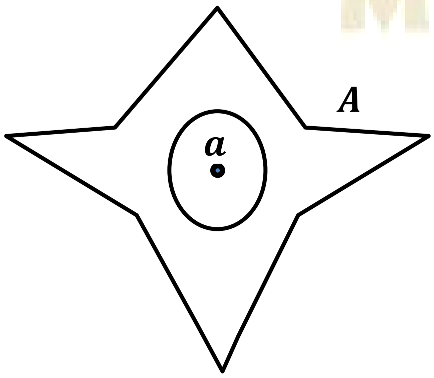
* إنَّ المجموعة $\mathbb{C}^*$ ليست محدّبة لوجود نقطتين $(1,0)$ و $(-1,0)$ بحيث إنَّ القطعة المستقيمة الواصلة بينهما ستمرُّ حتماً من نقطة المبدأ $(0,0)$ (والتي هي خارج $\mathbb{C}^*$) ، لكن $\mathbb{C}^*$ هي مجموعة مترابطة لأنّ بالإمكان الوصل بين أي نقطتين منها بخط مضلّعي واقع بكامله في $\mathbb{C}^*$ ، وكون $\mathbb{C}^*$ مفتوحة أيضاً فهي تشكّل منطقة.

والآن لنكمل في التعاريف الطبولوجيّة للأعداد العقديّة:

١٤) المجموعة النجمية:

نقول عن مجموعة $A \subseteq \mathbb{C}$ إنّها نجميّة إذا وجدت نقطة فيها يمكن وصلها بجميع نقاط المجموعة بقطعة مستقيمة واقعة بأكملها في المجموعة .

بفرض a هي النقطة الّتي يمكن وصلها بجميع نقاط المجموعة فإنَّ a تسمّى مركزاً للمجموعة النجمية (مركز النجمة) .



ملاحظة:

قد يكون لمجموعة نجميّة أكثر من مركز.

نتائج:

- كل محدّبة هي نجميّة ، وجميع نقاطها تعتبر مراكز لها ، و "العكس غير صحيح بالضرورة" .
- كل نجميّة تكون مترابطة و "العكس غير صحيح بالضرورة".
- كل نجمية مفتوحة هي منطقة.

سؤال:

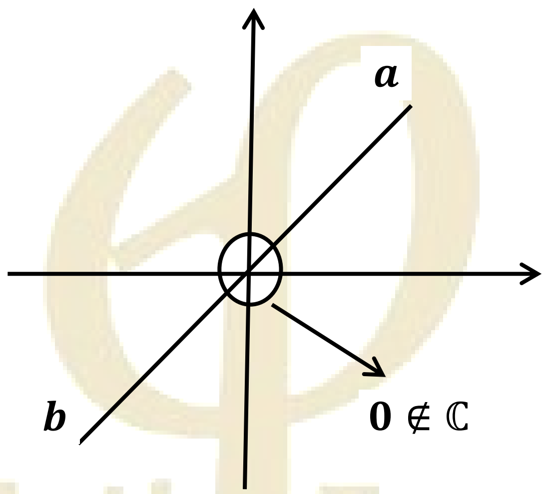
هل $\mathbb{C}^*$ نجميّة ؟! علّل إجابتك ..

الجواب:

لا ، لأنّه لو فرضنا جدلاً أنّها نجميّة عندئذٍ يوجد $a \in \mathbb{C}^*$ ، بحيث تكون a مركزاً لها ولو أخذنا المستقيم المار من a ومن المبدأ ومن b الواقعة على الطرف الآخر من المستقيم فإنَّ المستقيم لن يقع بكامله في $\mathbb{C}^*$ (سيمر حتماً من المبدأ) ، وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ و $\mathbb{C}^*$ ليست نجميّة .

$$\Rightarrow [a,b] \not\subseteq \mathbb{C}^*$$

إذاً $\mathbb{C}^*$ ليست محدّبة أيضاً ، لكنّها مترابطة .



ملاحظة:

أنصاف المستويات هي مجموعات محدّبة سواءً أكانت مع المستقيم الّذي يصنعها أو بدونه ، وبالتالي فهي مجموعات مترابطة.

" مبرهنات الترابط ":

مبرهنة (١):

G مترابطة و A مفتوحة ومغلقة معاً في G ، عندئذٍ:

$$A = G \text{ أو } A = \phi$$

مبرهنة (٢):

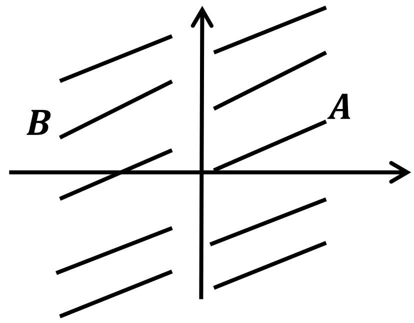
G غير مترابطة و (A/B) فصلاً لها ، ولتكن $U \subset G$ مجموعة مترابطة ، عندئذٍ:

$$U \subseteq B \text{ أو } U \subseteq A$$

مبرهنة (٣):

G مترابطة و $G \subseteq D \subseteq \overline{D}$ ، عندئذٍ فإنَّ: D مترابطة ، وبالتالي إذا كانت G مترابطة فإنَّ $\overline{G}$ مترابطة.

لكن العكس غير صحيح بالضرورة ، **فمثلاً:** إذا أخذنا المجموعة G بحيث:



$$G = A \cup B$$

عندئذٍ نلاحظ أنَّ G غير مترابطة لكن $\bar{G}$ مترابطة.

نتيجة:

اجتماع مجموعتين مترابطتين ومفتوحتين (منطقتين) مشتركتين بنقطة واحدة على الأقل هي مجموعة مترابطة ومفتوحة (منطقة) ، ويمكن تعميم هذه الخاصة من أجل الاجتماع المنتهي لمناطق مشتركة بنقطة واحدة على الأقل.

حل تمرين سابق من المحاضرة السابعة:

أوجد العلاقة بين الاحداثيات الديكارتيّة للعدد العقدي ، القسم الحقيقي والقسم التخيّلي (x, y) ، وبيّن احداثيّات النقطة p الممثّلة لذلك العدد على كرة ريمان ؟

إيجاد الاحداثيات الكروية لعدد عقدي بالشكل الجبري:

ليكن $z \in \mathbb{C}$ عندئذٍ توجد نقطة $P(x_1, x_2, x_3)$ ممثّلة لـ z ، على كرة ريمان :

إنَّ معادلة المستقيم المار من $z(x, y, 0)$ والقطب الشمالي $N(0,0,1)$.

لتكن a نقطة دارجة على المستقيم حيث $a(x_1, x_2, x_3)$ عندها :

$$\exists\, t \in \mathbb{R} : \ \vec{N} = t\,.\overrightarrow{N.z}$$

$$(x_1, x_2, x_3 - 1) = t(x, y, -1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = t.x \\ x_2 = t.y \\ x_3 = 1 - t \end{cases}$$

معادلات وسيطيّة للمستقيم المار من N و z ، و P تحقّق معادلة كرة ريمان ، أي :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

$$(t.x)^2 + (t.y)^2 + (1-t)^2 = 1$$

$$t^2x^2 + t^2y^2 + 1 - 2t + t^2 = 1$$

$$t(tx^2 + ty^2 - 2 + t) = 0$$

إمّا : $t = 0$:

$$(x_1, x_2, x_3) = (0,0,1) \text{ مرفوض}$$

أو:

$$t.x^2 + t.y^2 - 2 + t = 0$$

$$t.x^2 + t.y^2 + t = 2$$

$$t(x^2 + y^2 + 1) = 2$$

$$\Rightarrow t = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{2Re\, z}{|z|^2 + 1}}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{2Im\, z}{|z|^2 + 1}}$$

$$x_3 = 1 - \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{x^2 + y^2 + 1 - 2}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\boxed{x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}}$$

هذه هي مركبات الاحداثيات الكروية لعدد عقدي بدلالة الاحداثيات الديكارتية .

مثال:

أوجد الاحداثيات الكرويّة للعدد z :

$$z = 1 + 3\,i$$

$$\Rightarrow\ x_1 = \frac{2}{11} \ ,\ \ x_2 = \frac{6}{11} \ ,\ \ x_3 = \frac{9}{11}$$

<u>والآن لنكتب الاحداثيّات الديكارتيّة لـ Z بدلالة احداثيّاته الكرويّة :</u>

$$x_3 = 1 - t \quad \Rightarrow \quad t = 1 - x_3$$

$$x_1 = t.x \quad \Rightarrow \quad x_1 = x(1 - x_3) \ \Rightarrow \boxed{x = \frac{x_1}{1 - x_3}}$$

$$x_2 = t.y \quad \Rightarrow \quad x_2 = y\,(1 - x_3)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{x_2}{1 - x_3}}$$

<u>((وظيفة)):</u>

بالاعتماد على التمرين السابق أثبت أنَّ:

صورة دائرة مارّة بالقطب الشمالي ، هي مستقيم في المستوي العقدي ...

" انتهت المحاضرة "

☺ لا تنسونا من صالح دعائكم ☺

إعداد: خالد الشعار