بنى جبرية

٣

المحاضرة ٤

الموضوع : 1 التاريخ : / /

بنى جبرية (3)

المحاضرة الرابعة

التشاكلات المودولية

* تعريف: ليكن M و N مودولين على A ، نقول عن التطبيق f إنه تشاكل مودولي إذا وفقط إذا تحقق:

$$f : M \longrightarrow N$$

$$\forall x, y \in M \ ; \ \forall \lambda \in A$$

تحقق:

$\boxed{1}$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$

$\boxed{2}$ $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

تمرين: ليكن N ، M مودولين على A ، عندئذٍ:

$$Hom(M,N) = \{ f : M \longrightarrow N \ ; \ f \text{ تشاكل مودولي} \}$$

* نزود Hom بعملية التشكيل (+) الداخلية

$$+ : Hom(M,N) \times Hom(M,N) \longrightarrow Hom(M,N)$$

$$(f, g) \longrightarrow (f+g)(m) = f(m) + g(m)$$

لنثبت أن: $f+g \in Hom(M,n)$

الإثبات : لنثبت أن $f+g \in Hom(M,N)$

لدينا : $f+g : M \longrightarrow N$

ولنثبت أن $f+g$ تشاكل مودولي على A

$* \; \forall m_1, m_2 \in M$

$$(f+g)(m_1+m_2) = f(m_1+m_2) + g(m_1+m_2)$$
$$= f(m_1) + f(m_2) + g(m_1) + g(m_2)$$
$$= f(m_1) + g(m_1) + f(m_2) + g(m_2)$$
$$= (f+g)(m_1) + (f+g)(m_2)$$

$* \; \forall \lambda \in A \; ; \; \forall m \in M$

$$(f+g)(\lambda m) = f(\lambda m) + g(\lambda m)$$
$$= \lambda f(m) + \lambda g(m)$$
$$= \lambda (f+g)(m)$$

وبالتالي نجد أن :

$$(f+g) \in Hom_A(M,N)$$

* لنثبت أن : $(Hom(M,N), +)$ زمرة تبديلية :

$\forall m \in M \; ; \; f(m) = 0_N$

$$\Rightarrow f \in Hom(M,N) \neq \phi$$

ناصا : $\boxed{\cdot}$ الحيادي لـ f :

$$f : M \longrightarrow N$$
$$m \longrightarrow 0_N \; ; \; f(m) = 0_N$$

$\boxed{\cdot\cdot}$ أثبات أن $(+)$ عملية تشكيل داخلي

$\boxed{\because}$ تجميعي :

$\forall f, g, h \in Hom(M,N) \; ;$

$$(f+(g+h))(m) = f(m) + (g+h)(m)$$

$= f(m) + g(m) + h(m)$

$= (f+g)(m) + h(m)$

النظير :

$\forall f \in Hom_A(M,N) \Rightarrow -f : M \to N$

$(m) \to -f(m)$

وبالتالي نجد أن :

$(f - f)(m) = f(m) - f(m) = 0_N$

* كما أن (+) تبديلية لأن :

$\forall f,g \in Hom_A(M,N)$;

$(f+g)(m) = \underset{\in N}{f(m)} + \underset{\in N}{g(m)}$

وكون (+) تبديلية في N نفسها يكون :

$f(m) + g(m) = g(m) + f(m) = (g+f)(m)$

---

* لنعرف الآن عملية التشكيل الخارجي (.) :

$\forall \lambda \in A, \quad f \in Hom_A(M,N)$

$A \times Hom_A(M,N) \longmapsto Hom_A(M,N)$

$(\lambda, f) \longmapsto f(\lambda m) := \lambda f(m)$

لنثبت أن :

$\lambda f \in Hom_A(M,N)$

$\lambda f : M \to N$

$(\lambda f)(m) = \lambda . f(m)$

* $\forall\ m_1, m_2 \in M$

$(\lambda f)(m_1 + m_2) = \lambda . f(m_1 + m_2)$
$= \lambda . (f(m_1) + f(m_2))$
$= \lambda f(m_1) + \lambda f(m_2)$
$= (\lambda f)(m_1) + (\lambda f)(m_2)$

* $\forall\ \alpha \in A\ ;\ m \in M$

$(\lambda f)(\alpha m) = \lambda f(\alpha m) = \lambda . \alpha . f(m)$

لكون f تشاكل موديولي :

وكون A تبديلية فإن :

$\lambda . \alpha . f(m) = \alpha . \lambda f(m) = \alpha (\lambda f)(m)$

وبالتالي :

$\lambda f \in Hom_A(M, N)$

* $\forall\ \alpha, \beta \in A\ :\ \forall\ f, g \in Hom_A(M, N)$

$f(m) \in N$ كون N موديول على A فإن

وبالتالي :

$\boxed{*}\ (\alpha + \beta) f(m) = \alpha f(m) + \beta f(m)$

$\boxed{**}\ \alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$

$\boxed{***}\ (\alpha . \beta) f = \alpha . \beta f = \alpha(\beta f)$

$\boxed{****}\ 1_A . f = f$

وبالتالي $Hom_A(M, N)$ تشكل موديول على A

الصورة المباشرة و النواة

تعريف

ليكن: $f : M \longrightarrow N$ تشاكل مودولي
ولتكن: $X \subseteq M$ و $Y \subseteq N$

▫ نعرف الصورة المباشرة لـ X وفق f:

$$\overrightarrow{f}(X) = \{f(x) \in N ; x \in X\}$$

إذا كانت $X = M$ عندها يكون

$$\overrightarrow{f}(M) = \operatorname{Im} f$$

▫▫ نعرف الصورة العكسية لـ Y وفق f:

$$\overleftarrow{f}(Y) = \{x \in M ; f(x) \in Y\}$$

إذا كانت $Y = \{0_N\}$ عندها يكون:

$$\overleftarrow{f}(Y) = \ker f$$

و تدعى نواة f.

مبرهنة

ليكن $f : M \longrightarrow N$ تشاكل مودولي
على A ، ولتكن M_1 مودول جزئي
من M و N_1 مودول جزئي من N عندها

1 $\vec{f}(M_1)$ مودول جزئي من N

2 $\overleftarrow{f}(N_1)$ مودول جزئي من M

الإثبات : $f: M \longrightarrow N$

1 نفرض أن M_1 مودول جزئي في M

عندئذٍ :

$$\vec{f}(M_1) = \{ x : x \in N \,;\, f(m) = x \,;\, m \in M_1 \}$$

$$0 \in M_1 \Rightarrow f(0) = 0_N \in \vec{f}(M_1) \neq \phi$$

$$\forall x, y \in \vec{f}(M_1) \quad , \quad \vec{f}(M_1) \subseteq N$$

$$\Rightarrow \exists m_1, m_2 \in M_1 \,:\, f(m_1) = x \,,\, f(m_2) = y$$

$$\forall \alpha, \beta \in A :$$

$$\alpha x + \beta y = \alpha f(m_1) + \beta f(m_2)$$

لكون f تشاكل مودولي :

$$= f(\underbrace{\alpha m_1}_{\in M_1}) + f(\underbrace{\beta m_2}_{\in M_1})$$

لكون M_1 مودول جزئي في M

$$\Rightarrow \underbrace{f(\alpha m_1)}_{\in \vec{f}(M_1)} + \underbrace{f(\beta m_2)}_{\in \vec{f}(M_1)} = f(\underbrace{\alpha m_1 + \beta m_2}_{\in M_1})$$

$$\Rightarrow f(\alpha m_1 + \beta m_2) \in \vec{f}(M_1)$$

بالتالي $\vec{f}(M_1)$ مودول جزئي من N

~~~~~~~~

2 $\overleftarrow{f}(N_1)$ مودول جزئي في M :
~~~~~~~~

$$\overleftarrow{f}(N_1) = \{x : x \in M ; f(x) \in N_1\}$$

$\phi \neq \overleftarrow{f}(N_1)$, $\overleftarrow{f}(N_1) \subseteq M$

لأن :

$$f(0_M) = 0_N \in N \Rightarrow 0 \in \overleftarrow{f}(N_1)$$

* $\forall x, y \in \overleftarrow{f}(N_1)$, $\forall \alpha, \beta \in A$

$f(x) \in N_1$, $f(y) \in N_1$

$$f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x) + f(\beta y)$$

$$= \underbrace{\underbrace{\alpha \underbrace{f(x)}_{\in N_1}}_{\in N_1} + \underbrace{\beta \underbrace{f(y)}_{\in N_1}}_{\in N_1}}_{\in N_1}$$

لكون N_1 مودول جزئي من N

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in \overleftarrow{f}(N_1)$$

وبالتالي فإن $\overleftarrow{f}(N_1)$ مودول جزئي من M

تعريف: إذا كان f تشاكل مودولي من M إلى N وكان تقابل، عندها فإن f تماثل

ونكتب: $M \cong N$

انتهت المحاضرة