نظرية الاحتمالات

الدالة المولدة لعزوم متغير عشوائي وخواصها:

تعريف: ليكن Y متغيراً عشوائياً كثافته $f_Y(y)$. نعرّف الدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي Y بـ:

$$M_Y(t) := E\left(e^{tY}\right)$$

$$:= \begin{cases} \sum_{y} e^{ty} f_Y(y) & ; \quad Y \text{ متقطع} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ty} f_Y(y)\, dy & ; \quad (Y \text{ مستمر}) \end{cases}$$

خواص الدالة المولدة للعزوم:

① $$M_{aY+b}(t) = e^{tb} M_Y(at)$$

البرهان:

$$M_{aY+b}(t) := E\, e^{t(aY+b)}$$

$$= E\left[e^{at.Y} \cdot \underbrace{e^{tb}}_{\text{ثابت}}\right]$$

$$= e^{tb} E\left[e^{at.Y}\right] = e^{tb} \cdot M_Y(aY)$$

② $$m_r := E(Y^r) = \left.\frac{d^r M_Y(t)}{dt^r}\right|_{t=0}$$

الاشتقاق أولاً من المرتبة r، ثم التعويض بـ $t=0$

وبالتالي:

$$m = EY = M'_Y(t)\Big|_{t=0}$$

$$EY^2 = M''_Y(t)\Big|_{t=0}$$

③ إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين فإن:

سؤال دورة

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

البرهان:

$$M_{X+Y}(t) = E\left[e^{t(x+y)}\right]$$

$$= E\left[e^{tX} \cdot e^{tY}\right]$$

- في حالة الاستمرار:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot e^{ty} f(x,y)\, dx\, dy$$

وبما أن X و Y مستقلين فإن:

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

وبالتالي:

$$M_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot e^{ty} f_X(x) \cdot f_Y(y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ty} f_Y(y)\, dy$$

$$= M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

تعريف: العينة العشوائية لمتغير عشوائي Y هي مجموعة متغيرات عشوائية لها نفس توزع المتغير العشوائي Y ومستقلة فيما بينها أي أن $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ تكون عينة لـ Y

إذا كان $Y_i \sim$ (توزع Y)

$$\boxed{f_{Y_1,\dots,Y_n}(y_1,\dots,y_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{Y_i}(y)}$$

/ /

④ إذا كان Y متغيراً عشوائياً دالة المولدة للعزوم $M_Y(t)$ وكانت $Y_1, \dots, Y_n$ عينة عشوائية لـ Y

عندئذٍ فإن:

$$M_{\sum_{i=1}^{n} Y_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{Y_i}(t)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} M_Y(t)$$

$$= \left(M_Y(t)\right)^n$$

⑤ هنالك توزيع احتمالي وحيد له الدالة المولدة للعزوم $M(t)$

ولكل توزيع احتمالي دالة مولدة للعزوم خاصة به.

مثال: ليكن Y متغيراً عشوائياً دالة كثافته:

$$f_Y(y) = \begin{cases} p & , \quad y = 1 \\ q & ; \quad y = 0 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $M_Y(t)$ واحسب العزوم حتى المرتبة الثالثة ثم استنتج تباين Y

الحل:

$$M_Y(t) := E(e^{tY}) = \sum_y e^{ty} f_Y(y)$$

$$= e^{t(0)} \cdot q + e^{t(1)} \cdot p + 0$$

$$= 1 \cdot q + e^t \cdot p$$

$$\Rightarrow \boxed{M_Y(t) = q + p e^t}$$

الدالة المولدة لعزوم متغير عشوائي برنولي وسيطه p حيث $q = 1 - p$

باستخدام الاشتقاق ②

$m_1 := E(y) = M_y'(t)\Big|_{t=0}$

$= [q + p e^t]'\Big|_{t=0}$

$= p.e^t\Big|_{t=0} = p$

$m_2 := E y^2 = M_y''(t)\Big|_{t=0}$

$= [p.e^t]'\Big|_{t=0} = p.e^t\Big|_{t=0} = p$

$m_3 := E y^3 = M_y'''(t)$

$= (p.e^t)'\Big|_{t=0} = p.e^t\Big|_{t=0} = p$

$\Rightarrow V(y) = E y^2 - (E y)^2$

$= p - p^2 = p(1-p)$

$= p.q$

مثال: ليكن Y متغيراً عشوائياً كثافته:

$$f_y(y) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $M_y(t)$

الحل:

$M_y(t) := E(e^{ty})$

$:= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ty} f_y(y)\, dy$

$= \int_0^1 e^{ty} (1)\, dy$

$$= \left[\frac{e^{ty}}{t} \right]_0^1 = \frac{e^t}{t} - \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow M_Y(t) = \frac{e^t - 1}{t} \quad ; \; t \in \mathbb{R}$$

الدالة المولدة لعزوم شعاع عشوائي :

تعريف : ليكن $(X;Y)$ شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة $f(x,y)$ وإذا كان $E(e^{t_1X+t_2Y})$ موجوداً من أجل قيم $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ فإننا نعرف الدالة المولّدة لعزوم الشعاع (X,Y) بـ :

$$M_{(X,Y)}(t_1, t_2) := E\left(e^{t_1X+t_2Y}\right)$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{x} \sum\limits_{y} e^{(t_1x+t_2y)} f(x,y) & ; \; (X,Y) \text{ متقطع} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1x+t_2y} f(x,y)\, dx\, dy & ; \; (X,Y) \text{ مستمر} \end{cases}$$

خواص $M_{X,Y}(t_1, t_2)$:

1) إن $M_{X,Y}(t_1,t_2)$ تحدد توزيع (X,Y) وتوزيع X وتوزيع Y بسبب الوحدانية

2) $M_{(X,Y)}(t_1, 0) = M_X(t_1) = E(e^{t_1X})$

3) $M_{(X,Y)}(0, t_2) = M_Y(t_2) = E(e^{t_2Y})$

4) $E(X^k \cdot Y^m) = \left[\dfrac{\partial^{k+m} M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1^k \cdot \partial t_2^m} \right]_{t_1=0,\, t_2=0}$

⑤

$$EX = \frac{\partial M_{X,Y}(t_1,0)}{\partial t_1}\Big|_{t_1=0}$$

$$EY = \frac{\partial M_{X,Y}(0,t_2)}{\partial t_2}\Big|_{t_2=0}$$

$$E(X\,Y) = \frac{\partial^2 M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2}\Big|_{t_1=0,\,t_2=0}$$

مثال: لتكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & ; \quad 0 < x < y < +\infty \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عيّن $M_{X,Y}(t_1,t_2)$ واستنتج منها $M_X(t_1)$, $M_Y(t_2)$

الحل:

$$M_{(X,Y)}(t_1,t_2) := E[e^{t_1X+t_2Y}]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1x+t_2y} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1x+t_2y}\cdot e^{-y}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{t_1x}\left[\int_x^{+\infty} e^{(t_2-1)y}\,dy\right]dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{t_1x}\left[\frac{e^{(t_2-1)y}}{(t_2-1)}\right]_x^{+\infty}dx$$

فإذا كان $(t_2-1)<0 \Leftarrow \boxed{t_2<1}$ فإن:

$$= \int_0^{+\infty} e^{t_1x}\left[-\frac{e^{(t_2-1)x}}{t_2-1}\right]dx$$

$$= \frac{1}{1-t_2} \int_0^{+\infty} e^{(t_1+t_2-1)x} \, dx$$

$$= \frac{1}{1-t_2} \left[\frac{e^{(t_1+t_2-1)x}}{(t_1+t_2-1)} \right]_0^{+\infty}$$

$\boxed{t_1 + t_2 < 1} \Leftarrow t_1 + t_2 - 1 < 0$ وإذا كان

$$= \frac{1}{1-t_2} \left[- \frac{1}{t_1+t_2-1} \right]$$

$$\boxed{M_{X,Y}(t_1, t_2) = \left(\frac{1}{1-t_2} \right) \left(\frac{1}{1-t_1-t_2} \right)} \; ; \; \boxed{\begin{matrix} t_2 < 1 \\ t_1 + t_2 < 1 \end{matrix}}$$

$$M_X(t_1) = M_{X,Y}(t_1, t_2 = 0)$$

$$= \frac{1}{1-t} \, , \quad t_1 < 1$$

$$M_Y(t_2) = M_{X,Y}(t_1 = 0, t_2)$$

$$\boxed{= \frac{1}{(1-t_2)^2} \; ; \; t_2 < 1}$$

ملاحظة: من خاصية الوحدانية للدالة المولدة للعزوم فإننا نقول عن متغيرين عشوائيين X ، Y أنهما مستقلان عشوائياً إذا كان:

$$M_{(X,Y)}(t_1, t_2) = M_X(t_1) \cdot M_Y(t_2)$$

/ /

الدالة المميزة لمتغير عشوائي وخواصها:

تعريف: لمكن Y متغير أ عشوائياً كثافته الاحتمالية $f_Y(y)$

نعرف الدالة المميزة للمتغير العشوائي Y بـ:

$$\phi_Y(t) := E(e^{itY}) \quad ; t \in R$$

$$:= \begin{cases} \sum_y e^{ity} f_Y(y) & ; \quad Y \text{ متقطع} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f_Y(y)\, dy & ; \quad Y \text{ مستمر} \end{cases}$$

ملاحظة:

$$e^{ity} = \cos ty + i \sin ty$$

$$\Rightarrow |e^{ity}| = \sqrt{\cos^2 ty + \sin^2 ty} = 1$$

وبالتالي بأن $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\, dy = 1 \; ; \; |e^{ity}| = 1$

فإن:

$$\boxed{|\phi_Y(t)| \leq 1 \; ; \; \phi_Y(0) = 1}$$

خواص الدالة المميزة لـ Y:

① $\phi_{aY+b}(t) = e^{itb}\, \phi_Y(at)$

② إذا كانت $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ متغيرات عشوائية مستقلة فإن:

$$\boxed{\phi_{\sum_{i=1}^{n} Y_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{Y_i}(t)}$$

$$\phi_Y^{k}(t)\Big|_{t=0} = (i)^k \cdot E(Y)^k$$

وبالتالي:

$$\phi_Y'(t)\Big|_{t=0} = \boxed{i \cdot EY}$$

$$\phi_Y''(t)\Big|_{t=0} = \boxed{-EY^2}$$

$$\phi_Y^{4}(t)\Big|_{t=0} = E(Y^4)$$

الدالة المميزة لشعاع عشوائي (X, Y)

كثافته الاحتمالية المشتركة $f(x, y)$ يعرف بـ:

$$\phi_{(X,Y)}(t_1, t_2) := E\left[e^{i(t_1 X + t_2 Y)}\right]$$

$$= \begin{cases} \sum_x \sum_y e^{i(t_1 x + t_2 y)} f(x, y) & ; \text{ متقطع } (X, Y) \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t_1 x + t_2 y)} f(x, y)\, dx\, dy & ; \text{ مستمر } (X, Y) \end{cases}$$

مثال: ليكن Y متغيراً عشوائياً كثافته الاحتمالية:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \overset{\text{توافيق}}{C_y^n}\, p^y \cdot q^{n-y} & ; y = 0, 1, \dots, n \\ & 0 < p < 1 \quad q = 1 - p \\ 0 & ; \text{ خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين الدالة المولدة للعزوم والدالة المميزة لـ Y

الحل: إذا كان Y التوزيع الحداني (الثنائي) بوسيطين (P, n)

$$M_Y(t) := E(e^{tY}) = \sum_{y} e^{ty} f_Y(y)$$

$$= \sum_{y=0}^{y=n} e^{ty} C_y^n p^y q^{n-y}$$

$$= \sum_{y=0}^{y=n} C_y^n (p.e^t)^y q^{n-y}$$

وحسب منشور ثنائي حد نيوتن

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_k^n a^k b^{n-k}}$$

فإن:

$$\boxed{M_Y(t) = (pe^t + q)^n}$$

$$\Phi_Y(t) := E(e^{itY}) := \sum_{y} e^{ity} f_Y(y)$$

$$= \sum_{y=0}^{y=n} e^{ity} C_y^n p^y q^{n-y}$$

$$= \sum_{y=0}^{n} C_y^n (P.e^{it})^y q^{n-y}$$

نيوتن

$$= \boxed{(P.e^{it} + q)^n}$$

مثال: ليكن Y متغيراً عشوائياً كثافته الاحتمالية

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3e^{-3y} & ; y > 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

Y متغير عشوائي أسي وسيطه $\lambda = 3$

عيّن $\Phi_Y(t)$

الحل:

$$\phi_y(t) := E(e^{ity})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f_y(y)\, dy$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{ity}\, 3e^{-3y}\, dy$$

$$= 3\int_{0}^{+\infty} e^{(it-3)y}\, dy$$

$$= 3\left[\frac{e^{(it-3)y}}{it-3}\right]_0^{+\infty}$$

وبذا كان:

$$it-3 < 0 \Rightarrow \boxed{t < \frac{3}{i}}$$

فإن:

$$\phi_y(t) = 3\left(-\frac{1}{it-3}\right)$$

$$\boxed{\phi_y(t) = \frac{3}{3-it} \quad ; \quad t < \frac{3}{i}}$$

انتهت المحاضرة الثامنة عشر

والأخيرة