Syria Math

مبادئ الإحصاء والاحتمالات

الدكتور: احمد يونسو

المحاضرة : الثامنة عشرة

التاريخ : ٢٠١٦/١٢/١٢

إعداد : زهرة + شهيناز

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

٢٠٢٠/٤/١٢

المحاضرة الثامنة

المتغيرات العشوائية المستمرة وتوزيعها الاحتمالي ...

تعريف: المتغير العشوائي X "مستمراً" إذا وجدت دالة حقيقية $f(x)$ غير سالبة

$$\star\ F(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$

حيث $F(x)$ دالة التوزيع الاحتمالي الاحتمالي لـ x وتعطى بـ

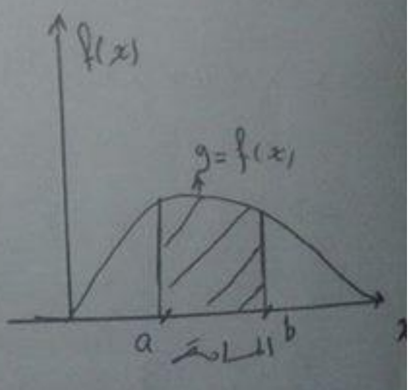
$$F(t)=P(x<t)$$

- تدعى الدالة $f(x)$ المحققة للعلاقة $(\star)$ دالة الكثافة الاحتمالية لـ x (الكثافة الاحتمالية لـ x أي كثافة x)

حيث يكون من أجل هذه الدالة إذا كانت $x<b$ فإنه:

$$\underbrace{P(a\leq x<b)=F(b)-F(a)}_{\text{تعطى بـ}}$$

$$=\int_a^b f(x)\,dx$$



إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً فإنه: (بعض)

$$P(x=c)=0$$

- حيث c نقطة من مجموعة الأعداد R

الإثبات:

$$P(x=c)=P(c\leq x\leq c)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0} P(c\leq x<c+\varepsilon)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(F(c+\varepsilon)-F(c)\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0} F(c+\varepsilon)-F(c)$$

$$=F(c)-F(c)=0$$

- $F(x)$ مستمرة من x مستمراً

- f مستمرة على يسار x إذاً تقطع - مستمرة عند x

ملاحظة: ← $g(x)$ مستمرة إذا كان

$$\lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}(x+\Delta x)=g(x)$$

- إذا كان $a<b$ وكان x متغيراً مستمراً فإنه: (تذكر...)

$$-P(a\leq x\leq b)=P(a\leq x<b)$$

$$=P(a<x\leq b)=P(a\leq x<b)$$

$$=F(b)-F(a)$$

$P(x=3)=0$ ظاهرة الاحتمال المستمر لن $x=3$ إذاً تقطع تماس

$$-P(a\leq x\leq b)=P\left[(a\leq x<b)\cup(x=b)\right]$$

- هذه حوادث متنافية (الاحتمال $\emptyset$)

$$=P(a<x<b)+\underbrace{P(x=b)}_{0}$$

(1)

ملاحظة

* ملاحظة لدينا:

$$F(+\infty)=1$$

$$P(-\infty<X<+\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$$

لأنه:

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$ وبأخذ $t=+\infty$

قاعدة

حتى تكون $f(x)$ دالة واحدة لكثافة احتمالية لمتغير عشوائي X ذو الاستمرار الشرطين:

1- $\forall x\in\mathbb{R};\ 0\leqslant f(x)$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$

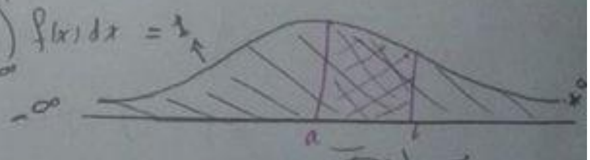
تمرين

لدينا $F(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$ حيث $F(x)$ دالة التوزيع

و $f(x)$ تكون $f(x)$ مشتقة أي:

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=F'(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$$



$f(a<x<b)$

تمرين

- X متغير عشوائي له الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x)=\begin{cases} c(4x-2x^2) & ;\ 0<x<2 \\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب:

1) عين قيمة الثابت C

2) عين دالة التوزيع التجميعي $F(x)$

3) أوجد $P(x>1)$

الحل..

1) لكون $f(x)$ كثافة احتمالية فإن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{2} c(4x-2x^2)\,dx+\int_{2}^{+\infty} 0\,dx=1$$

$$\Rightarrow c\int_{0}^{2}(4x-2x^2)\,dx=1$$

$$\Rightarrow c\left[2x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_0^2=1$$

$$=c\left(8-\frac{16}{3}\right)\Rightarrow c=\frac{3}{8}$$

(2)

2) إذا كان $x \le 0$ فإن

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0$$

إذا كان $0<x<2$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int_{0}^{x}\frac{3}{8}(4t-2t^2)\,dt$$

$$=\frac{3}{8}\left[2t^2-\frac{2}{3}t^3\right]_0^x$$

$$=\frac{3}{8}\left(2x^2-\frac{2}{3}x^3\right)$$

الحالة الأخيرة $2 \le x$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int_{0}^{2}\frac{3}{8}(4t-2t^2)\,dt$$

$$+\int_{2}^{x} 0\,dt$$

$$=\frac{3}{8}\left[2t^2-\frac{2}{3}t^3\right]_0^2$$

$$=\frac{3}{8}\left[\frac{8}{3}\right]=1$$

3)

$$P(x>1)=P(1<x<+\infty)$$

$$=F(+\infty)-F(1)$$

$$=1-F(1)$$

$$=1-\frac{3}{8}\left(2-\frac{2}{3}\right)$$

$$=1-\frac{3}{8}\times\frac{4}{3}$$

$$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$(1<x)\cup(x\le 1)=\mathbb{R}$$

$$P(1<x)=1-P(x\le 1)$$

$$=1-F(1)$$

طريقة ثانية

$$P(1<x)=\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$=\int_{1}^{\infty}\frac{3}{8}(4x-2x^2)\,dx=\frac{3}{8}\left[2x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_1^2$$

$$=\frac{3}{8}\left[\frac{8}{3}-\frac{4}{3}\right]$$

$$=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

مثال ...

$$f(x)=\begin{cases} x & : 0<x\le 1 \\ 2-x & : 1<x<2 \\ 0 & : \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب ...

1) بيّن أن $f(x)$ دالة كثافة احتمالية

2) أوجد دالة التوزيع $F(x)$

3) احسب $P\left(\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}\right)$

3

أولاً

1) أ) الشرط الأول: واضح أن $0 \le f(x) \; ; \; \forall x \in R$

ب)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx + \int_{1}^{2} (2-x)\,dx + \int_{2}^{+\infty} 0\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2} + (4-2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2 - 2 + \frac{1}{2} = 1$$

2) إذا كان $x \le 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

عندما $0 < x < 1$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^x = \frac{x^2}{2}$$

عندما $1 < x < 2$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} t\,dt + \int_{1}^{x} (2-t)\,dt$$

$$= \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + \left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^x$$

$$= \frac{1}{2} + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2x - \frac{x^2}{2} - 1$$

عندما $2 \le x$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} t\,dt + \int_{1}^{2} (2-t)\,dt + \int_{2}^{x} 0\,dt$$

$$= \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + \left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2} + (4-2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \cancel{2} - \cancel{2} + \frac{1}{2} = 1$$

بالتالي

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \; x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & , \; 0 < x < 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1 & , \; 1 < x < 2 \\ 1 & , \; 2 \le x \end{cases}$$

3)

$$P\left(\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}\right)$$

$$= F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(2\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} - 1\right) - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}$$

$$= 3 - \frac{9}{8} - 1 - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

وفي الحالة الخاصة عندما يكون $g(x)$ تقابلياً فإن
لكل قيمة لـ Y تقابلها قيمة واحدة لـ X ويكون :

$$\forall y \in R \; ; \; f(y) = P(Y = y)$$

$$= P(g(x) = y) = P(x = g^{-1}(y))$$

$$= f_X(g^{-1}(y))$$

" انتهت محاضرة "