Syria Math

البنى الجبرية 1

الدكتور: حمزة الحاكمي

المحاضرة : الواحدة والعشرون

التاريخ : ٥/١٢/٢٠١٦

إعداد : أحمد أبو التوت

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

المجموع المباشر للزمر

تعريف : لتكن G زمرة و H,K زمرة جزئية ناظمية في G نقول إن G تساوي مجموع مباشر للزمرتين H,K ونرمز لذلك $G = H \times K$ إذا كان :

١) $G = H.K$

٢) $H \cap K =< e >$

تمهيدية : لتكن G زمرة و H,K زمر جزئية ناظمية في G بحيث $H \cap K =< e >$ عندئذ :

$$\forall h \in H \quad , \quad \forall k \in K; \quad h.k = k.h$$

البرهان : ليكن $h \in H \, , \ k \in K$ ولنأخذ العنصر

$$h.k.h^{-1}.k^{-1} = \underbrace{(h.k.h^{-1})}_{\in hKh^{-1} \subseteq K}.\underbrace{k^{-1}}_{K} \in K$$

$$h.k.h^{-1}.k^{-1} = \underbrace{h}_{\in H}.\underbrace{(k.h^{-1}.k^{-1})}_{\in kHk^{-1} \subseteq H} \in H$$

اي أنه $h.k.h^{-1}.k^{-1} \in H \cap K =< e >$

ومنه $h.k.h^{-1}.k^{-1} = e$ وبالضرب بالعنصر k من اليمين ثم مرة اخرى بالعنصر h من اليمين ايضا نجد أن

$$h.k = k.h$$

مبرهنة : لتكن G زمرة و H,K زمر جزئية ناظمية في G فإن الشروط الاتية متكافئة :

١) $G = H \times K$ ((المجموع المباشر تبديلي لأنه $H \times K$ معرف وهو تبديلي))

٢) كل $g \in G$ يكتب بشكل وحيد على النحو :

$g = h.k$ حيث $h \in H \quad , \quad k \in K$

الاثبات :

$(1 \leftarrow 2)$ لنفرض أن $G = H \times K$ عندئذ حسب التعريف $G = H.K$ ومنه أيا كان $g \in G$ يوجد $h \in H \, , k \in K$ بحيث :

$$g = h.k$$

و لنفرض أن $g = h_1.k_1$ حيث $h_1 \in H \, , k_1 \in K$

عندئذ $h.k = h_1.k_1$

نضرب بمقلوب h من اليسار نجد :

$$k = h^{-1}.h_1.k_1$$

نضرب من اليمين بمقلوب k_1 نجد :

$$k.{k_1}^{-1} = h^{-1}.h_1 \; \epsilon \, K \cap H =< e >$$

حسب التمهيدية السابقة

$$k.{k_1}^{-1} = e \quad \Longrightarrow k_1 = k$$

$$h^{-1}.h_1 = e \quad \Longrightarrow h_1 = h$$

وهذا بين أن كل عنصر $g \; \epsilon \; G$ يكتب بصورة وحيدة بالشكل :

$$g = h.k \quad : \quad h \, \epsilon \, H \quad , \quad k \, \epsilon \, K$$

(1 ← 2)

بما ان K,H ناظمية في G فإن $H.K$ معرف أي أن :

$$H.K \; \subseteq G$$

◄الاحتواء المعاكس :

ليكن $g \; \epsilon \; G$ عندئذ حسب الفرض فإن

$$g = h.k \quad : \quad h \, \epsilon \, H \quad , \quad k \, \epsilon \, K$$

$$g = h.k \quad \epsilon \; H.K$$

وبالتالي : $G \subseteq H.K \Longleftarrow G = H.K$

تم اثبات الشرط الاول بالتعريف بقي اثبات الشرط الثاني

لنفرض جدلاً أن $K \cap H \neq < e >$ ومنه يوجد $x \; \epsilon \; H \; \cap k$ وأن $e \neq x$

عندئذ : $x = h \;\; : \;\; h \, \epsilon \, H \quad , \; x = k \;\; : \;\; k \, \epsilon K$

ومنه فإن $h = k$

نضرب بـ k^{-1} من اليمين : $\underbrace{h}_{e\neq}.\underbrace{k^{-1}}_{e\neq} = e$

وأيضا المحايد يكتب بالشكل $e.e=e$ ومنه العنصر كتب بشكلين مختلفين وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ ومنه

$$K\cap H=<e>$$

ومنه $G=H\times K$

مبرهنة : لتكن G زمرة و H,K زمر جزئية ناظمية في G عندئذ :

$$H\times K\cong H\oplus K$$

البرهان : لما كانت H,K زمر جزئية ناظمية في G فإن $H\times K$ ايضا زمرة و $H\oplus K$ زمرة والأن :

لنعرف العلاقة : $f: H\times K\to H\oplus k$ بالشكل :

$$\forall\, h.k\in H\times K\quad ;\quad f(h.k)=(h,k)$$

♫إن f تطبيق ومتباين لأن :

$$\forall\, h.k\,,h_1.k_1\in H\times K\quad :\ h.k=h_1.k_1$$

$$\Leftrightarrow h=h_1\ ,k=k_1\Leftrightarrow (h,k)=(h_1,k_1)$$

$$\Leftrightarrow f(h.k)=f(h_1,k_1)$$

♫f تشاكل لأن :

$$f((h.k).(h_1.k_1))=f(h.(k.h_1).k_1)=f(h.h_1.k.k_1)=(hh_1,kk_1)=(h,k)(h_1,k_1)$$

$$=f(h.k).f(h_1.k_1)$$

♫f غامر لأن إذا كان :

$$(x,y)\in H\oplus k$$

عندئذ $x\in H\ ,\ y\in K$ ومنه $x.y\in H\times k$

نأخذ الصورة المباشرة $f(x.y)=(x,y)$ وبالتالي f غامر .

الزمر التبديلية المنتهية

مبرهنة : لتكن G زمرة تبديلية منتهية مرتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي P عندئذ يوجد في G عنصر مرتبته P .

الاثبات :

لنفرض أن $(G:1)=m.P$ حيث m عدد صحيح وحسب الاستقراء على m حيث $m\geq 1$: من أجل $m=1$

فإن $(G:1)=P$

عندئذ $G=<a>$ دوارة فإن : $(G:1)=o(a)=P$

لنفرض أن القضية صحيحة لأجل جميع الزمر الجزئية و **المحتواة تماماً** في G .

نميز حالتين :

١) توجد في G زمرة جزئية $G\neq K$ دليلها لا يقبل القسمة على P وحسب لاغرانج فإن :

$$m.P=(G:1)=(G:K)(K:1)$$

وبما أن $(G:K)$ لا تقبل القسمة على P ومنه $(H:1)$ تقبل القسمة على P وحسب الفرض الاستقرائي يوجد في K عنصر مرتبته P وبالتالي فإن في G عنصر مرتبته P .

٢) أدلة كل الزمر الجزئية المحتوات تماما في G تقبل القسمة على P.

لنفرض أن l هي جميع الزمر المحتواة تماما في G . ولنفرض أن H هو العنصر الأكبر في l من حيث المرتبة .

إن $G\neq H$ زمرة جزئية أعظمية (كل عنصر اكبر هو عنصر أعظمي) ولنفرض أن $(H:1)=S$

اذا كان S يقبل القسمة على P وحسب الفرض الاستقرائي فإن H تحوي عنصر مرتبته P وبالتالي G تحوي عنصر مرتبته P ويتم المطلوب .

أما اذا كان S لايقبل القسمة على P لدينا $H\subsetneqq G$ عندئذ يوجد عنصر $x\in G$ بحيث $x\notin H$ ولنفرض أن

$T=<x>$ وأن $(T:1)=t$

نلاحظ أن $H.T$ زمرة جزئية في G وأن $H\subsetneqq H.T$ ومنه $G=H.T$ (لان H أعظمية ووجدنا أكبر منها ولا تساويها فهي حتما $G=H.T$ لأنه فرضنا أن $H\subsetneqq G$)

أيضا لدينا حسب مبرهنة التماثل الثانية :

$$\frac{G}{H}=\frac{H.T}{H}\cong\frac{T}{H\cap T}$$

ومنه

$$\left(\frac{G}{H}:1\right)=\left(\frac{T}{H\cap T}:1\right)$$

مرتبه زمرة الخارج هو الدليل وبالتالي

$$(G:H) = (T:H \cap T)$$

حسب لاغرانج $(G:1) = (G:H)(G:1)$

$$m.p = (G:1) = (T:H \cap T)(\underbrace{H:1}_{P\text{لا تقبل القسمة على}})$$

ولما كانت مرتبة H لا تقبل القسمة على P عندئذ :

$(T:H \cap T)$ تقبل القسمة على P .

وبما فإن : $(T:1) = (T:T \cap H)(T \cap H:1)$

ولما كانت T دوارة فإن T تحوي زمرة جزئية مرتبتها P هي $< x^{\frac{t}{P}} >$ وهذه يبين أن $x^{\frac{t}{P}} \in G$

وأن مرتبتها : $O\left(x^{\frac{t}{P}}\right) = P$

اعتمادا على المبرهنة الأخيرة يمكن صياغة ما يلي

#نتيجة :

كل زمرة تبديلية ومنتهية ومرتبتها تقبل القسمة على عدد أولي P تحوي زمرة جزئية مرتبتها P .

" انتهت المحاضرة "