هندسة تحليلية

الدكتورة : ميسم جديد

المحاضرة : الحادية عشرة

إعداد : منى + راما

المحاضرة الحادي عشر:

التناظر بالنسبة لمستوي:

مثال: أوجد نظير النقطة $M_1(1,2,-4)$ بالنسبة للمستوي Q:

$Q: x+y+z+1=0$

الحل: نفرض أن M_2 هي نظيرة M_1 بالنسبة للمستوي Q عندئذٍ يتحقق:

$\vec{N} \parallel \overrightarrow{M_1M_2} \iff \lambda = \frac{x_2-1}{1} = \frac{y_2-2}{1} = \frac{z_2+4}{1}$

$N(1,1,1)$

$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-1,\ y_2-2,\ z_2+4)$

$M_0\left(\frac{x_2-1}{2},\ \frac{y_2-2}{2},\ \frac{z_2+4}{2}\right)$

$x_2 = 1+\lambda$
$y_2 = 2+\lambda$
$z_2 = -4+\lambda$
نعوضهن في معادلة المستوي Q

$1+\lambda+2+\lambda-4+\lambda+1=0$

$3\lambda = 0$

$\boxed{\lambda=0}$

$x_2 = 1+0$
$y_2 = 2+0$
$z_2 = -4+0$
$M_2(1,2,-4)$

نستنتج أن M_2 هي نفسها M_1

وبالتالي $M_1 \in Q$ عندما تكون النقطة تنتمي للمستوي فإن النقطة والنظيرة نفسها

مثال: أوجد نظير النقطة $M_1(1,0,1)$

$Q: x-y+2z+1=0$

$N(1,-1,2)$

نفرض أن M_2 هي نظيرة M_1 بالنسبة للمستوي

$\overrightarrow{M_1M_2} \parallel N \iff \frac{x_2-1}{1} = \frac{y_2}{-1} = \frac{z_2-1}{2}$

$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-1,\ y_2,\ z_2-1)$

$M_0\left(\frac{x_2+1}{2},\ \frac{y_2}{2},\ \frac{z_2+1}{2}\right) \in Q$

$x_2 = 1+\lambda$
$y_2 = -\lambda$
$z_2 = 1+\lambda$
نعوضهن في معادلة المستوي Q

$1+\lambda+\lambda+2+2\lambda+1=0$

$4\lambda+4=0$

$\boxed{\lambda=-1}$

$x_2=-1$
$y_2=+2$
$z_2=-1$

M_0 هي منتصف $\overrightarrow{M_1M_2}$.

$\frac{x_2+1}{2} + \frac{y_2}{2} + \frac{z_2+1}{2} = 0$

$x_2+1+y_2+z_2+1=0$

$x_2+y_2+z_2+2=0$

$(1+\lambda)+(-\lambda)+1+\lambda+2=0$

$\lambda+4=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=-4}$

$x_2=-3$
$y_2=4$
$z_2=-3$
$M_2(-3,4,-3)$
$M_2 \in Q$

نظير مستوي بالنسبة لمستوي آخر:

ليكن لدينا المستوي:

$Q_1 \equiv p x_1 + q y_1 + r z_1 + h = 0$

$Q \equiv p x + q y + r z + h = 0$

M_1 نقطة من المستوي Q_1

نظيرة M_1 نفرضها $M_2(x_2, y_2, z_2)$ بالنسبة المستوي Q:

$\Rightarrow N_Q \parallel M_1M_2 \Leftarrow$

مثال:

$Q_1 = 2x + y - z + 1 = 0$

$Q = x + 2y - 3z = 0$

$N(1, 2, -3)$

①... $\dfrac{x_2 + x_1}{1} = \dfrac{y_2 + y_1}{2} = \dfrac{z_2 + z_1}{-3}$

M_0 منتصف M_1M_2

$M_0\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \dfrac{z_2 + z_1}{2}\right)$

نعوض M_0 في Q:

$\dfrac{x_1 + x_2}{2} + 2\left(\dfrac{y_1 + y_2}{2}\right) - 3\left(\dfrac{z_1 + z_2}{2}\right) = 0$

$\dfrac{x_1 + x_2}{2} + y_1 + y_2 - 3\dfrac{(z_1 + z_2)}{2}$

②... $x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2 - 3z_1 - 3z_2 = 0$

④

$x_1 = x_2 - \lambda$

$y_1 = y_2 - 2\lambda$

$z_1 = z_2 + 3\lambda$

نعوض منه المعادلات في $\boxed{2}$

$- x_2 + \lambda + 2y_2 - 4\lambda + 3z_2 - 9\lambda = 0$

$- x + 2y_2 + 3z_2 - 12\lambda = 0$

نعوض 4 في 2 فنحصل على قيمة λ بدلالة x_2, y_2, z_2 نعوضها في 4 ونحصل على العلاقات التي تربط مابين إحداثيات M_1 و M_2 بتعبير آخر نكون قد حسبنا (x_1, y_1, z_1) بدلالة x_2, y_2, z_2

نعلم أن النقطة M_1 تنتمي للمستوي Q فإحداثياتها تحقق معادلة هذا المستوي نحصل على معادلة بطلحط بالمتحولات x_2, y_2, z_2 وهي معادلة المستوي Q_2 نظيرة Q_1 بالنسبة للمستوي Q.

التناظر بالنسبة لمستقيم:

نقول عن نقطتين أنهما متناظرتان بالنسبة لمستقيم، إذا كان هذا المستقيم يعامد القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين في منتصفها.

مثال: أوجد نظير النقطة: $M_1(4, 1, 6)$ بالنسبة للمستقيم D المعين بالمعادلتين

$$D \begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0 \\ 2x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

$D \perp M_1M_2$

$\vec{V} \perp M_1M_2 \Leftrightarrow V \cdot M_1M_2 = 0$

$\left.\begin{array}{l} N_1(1, -1, -4) \\ N_2(2, 1, -2) \end{array}\right\} \vec{V} = N_1 \wedge N_2$

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{K} \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{K}$$

$\vec{V}(6, -6, -3)$

M_0 منتصف M_1M_2 حيث أن $M_0 \in D$

بإحداثياته تحقق معادلتي المستقيم

①...

②...

① و ② و ③ تشكل جملة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل هي: $M_2(x_2, y_2, z_2)$ إحداثيات M_2 نظيرة M.

مثال: نظير المستوي بالنسبة لمستقيم

أوجد نظير المستوي Q_1:

$$Q \equiv x + y - 2z + 1 = 0$$

$$D \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

نفرض أن $M(x, y, z)$ نقطة من المستوي Q_1 نظيرتها بالنسبة لمستقيم D هي النقطة M_2 التي إحداثياتها: $M_2(x_2, y_2, z_2)$

المطلوب: إيجاد معادلة المستوي Q_2 نظير Q_1 بالنسبة لـ D.

$$V \perp MM_2 \iff \overrightarrow{MM_2} \cdot V = 0 \;\ldots ①$$

M_1 منتصف $\overrightarrow{MM_2}$ فهي تحقق معادلة المستقيم نحصل منها على معادلتين لحل جملة المعادلات

-- ①

-- ②

-- ③

نقوم بحل جملة المعادلات عن $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ باعتبار مجاهيل $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ فنحسبها بدلالة (x_2, y_2, z_2) ثم نعوض الناتج في معادلة Q_1 نحصل على علاقة تربط بين إحداثيات النقطة M_2 هذه العلاقة هي معادلة المستوي Q_2 نظير Q_1 بالنسبة للمستقيم