Syria Math

البنى الجبرية 1

الدكتور: حمزة الحاكمي

المحاضرة : السادسة والعشرين "الأخيرة"

التاريخ : ٢٠/١٢/٢٠١٦

إعداد : أحمد أبو التوت

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

مبرهنة : لتكن G زمرة تبديلية منتهية مرتبتها $m.P^n$ حيث m لا يقبل القسمة على P عندئذ $G = H \times K$:

$$K = \{x : x \epsilon G \ ; x^m = e\}$$ زمرة جزئية في G

$$H = \{x : x \epsilon G \ ; x^{P^n} = e\}$$ زمرة جزئية في G

$$(H:1) = P^n \quad , \quad (K:1) = m$$

البرهان : نعلم أن $\gcd(m,P) = 1$ و $\gcd(m,P^n) = 1$

إن $(K:1)$ لا تقبل القسمة على P لأنه اذا كانت $(K:1)$ تقبل القسمة على P فإن

$$(K:1) = a.p \quad : a \in Z$$

ونعلم أن $H \cap K =< e >$ ولما كان

$$(G:1) = (K:1)(H:1)$$
$$m.P^n = (H:1).a.p$$

وبالتالي

$$(H:1) = \frac{m}{a}.P^{n-1}$$

لدينا ايضا K زمرة تبديلية منتهية مرتبتها تقبل القسمة على P وبالتالي K تحوي عنصر مرتبته P وليكن Z ومنه $Z^m = e$ وبالتالي P يقسم m وهذه مرفوض فرضا

ومنه فإن $(H:1)$ تقبل القسمة على P ومنه فإن $(H:1) = b.P \quad : b \in Z$ وان

$$m.P^n = (K:1).b.P$$

$$(K:1) = \frac{m}{b}.P^{n-1}$$

وهذه لا يتحقق الا في حالة $P^{n-1} = b$ لان مرتبة K لا تقبل القسمة على P ومنه بتعويض b فإن

$$(K:1) = m$$

$$(H:1) = P^n$$

مبرهنة : كل زمرة تبديلية منتهية G يمكن نشرها على الشكل

$$G = G(P_1) \times \dots \dots \dots \dots \dots \times G(P_n)$$

حيث $G(P_i) = \{x : x \in G \ ; x^{{P_i}^{n_i}} = e\}$ و أن $(G(P_i):1) = {P_i}^{n_i}$

البرهان : لنفرض أن

$(G:1) = S$ وأن $S = P_1^{n_1} \underbrace{P_2^{n_2} \dots\dots\dots P_t^{n_t}}_{m}$ حيث P_i أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى وحسب المبرهنة السابقة فإن

$$G = G(P_1) \times K$$

حيث $G(P_1) = \{x : x \in G \,; x^{P_1^{n_1}} = e\}$

$$(G(P_1):1) = P_1^{n_1} \quad , \quad (K:1) = m$$

أيضاً لدينا :

$$K = G(P_2) \times K'$$

لأجل K فإن

$$G(P_2) = \{x : x \in K \,; x^{P_2^{n_2}} = e\}$$

$$(G(P_2):1) = P_2^{n_2} \quad , \quad (K':1) = m$$

وهكذا نجد أن

$$G = G(P_1) \times \dots\dots\dots\dots \times G(P_t)$$

$$G(P_i) = \{x : x \in G \,; x^{P_i^{n_i}} = e\}$$

$$(G(P_i):1) = P_i^{n_i}$$

Syria Math

مبرهنة (تقبل دون برهان) : لتكن G زمرة تبديلية منتهية مرتبتها قوة لعدد أولي P عندئذ

$$G = \langle a \rangle \times K$$

حيث $a \in G$ ذو المرتبة الأكبر و K زمرة جزئية في G .

مبرهنة : لتكن G زمرة تبديلية منتهية مرتبتها قوة لعدد أولي P عندئذ فإن G تكتب على شكل مجموع مباشر لزمر دوارة مرتبة كل منها قوة لعدد أولي.

البرهان : لنفرض أن

$$(G:1) = P^n$$

بالاستقراء حسب n من أجل $n=1$ فإن

$(G:1)=P$ ومنه $G=<a>\times<e>$

لنفرض أن النص صحيح لأجل اي زمرة في G عندئذ $G=<a>\times K$ حيث $a\in G$ ذو المرتبة الأكبر و K زمرة جزئية في G وحسب الفرض الاستقرائي فإن

$$K=<a_1>\times \dots\dots\dots..\times<a_t>$$

ومنه $G=<a>\times<a_1>\times \dots\dots\dots..\times<a_t>$

مبرهنة : كل زمرة تبديلية منتهية تنشر على شكل مجموع مباشر لزمر دوارة

البرهان : لتكن G زمرة تبديلية منتهية عندئذ فإن

$$G=G(P_1)\times \dots\dots\dots\dots\dots\times G(P_t)$$

حيث $G(P_i)$ زمرة جزئية في G مرتبتها ${P_i}^{n_i}$ وأنه لاجل كل i فإن $G(P_i)$ هي مجموع مباشر لزمر دواره وبالتالي فإن G هي مجموع مباشر لزمر دواره .

تمرين : أثبت ان كل زمرة منتهية مرتبتها 15 تكون دوارة .

البرهان : لدينا $(G:1)=15=3.5$ حسب مبرهنة سيلوف الأولى فإن G تحوي عنصر مرتبته 3 وليكن a وأيضا تحوي عنصر مرتبته 5 وليكن b وأن $a\neq b$ حيث $a,b\,\epsilon\, G$

$$o(a)=3\quad,\quad o(b)=5$$

نفرض ان $H=<b>$ وأن $K=<a>$ كل منهما زمر دوارة

وأن $H\cap K=<e>$ لأنه إذا كان $y\,\epsilon\, H\cap K$ وأن .

بفرض أن $o(y)=\alpha$ نجد ان $y^\alpha=e$

$$y\,\epsilon\, K\ \ ;\ \ y^3=e$$

$$y\,\epsilon\, H\ \ ;\ \ y^5=e$$

ومنه α يقسم 3,5 وبالتالي $\alpha=1$ ومنه $y=e$

إن K هي زمرة $3-$ زمرة جزئية سيلوفية في G ((" كون 3^2 لا تقسم مرتبة G فإن فإن $3-$ هي سيلوفية 11 "))
وعدد هذه الزمر الجزئية تساوي $1+3K$ وتقسم مرتبة G

$K = 0$ 1 مقبول

$K = 1$
$K = 2$
$\begin{cases} 4 \\ 7 \end{cases}$ مرفوض كون كل واحد منهم لا يقسم مرتبة G

بالتالي $K \neq 0$ فإن العدد $3K + 1$ لا يقسم مرتبة G وهذا يبين انه يوجد $3-$ زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3 واحدة فقط وبالتالي فهي ناظمية .

إن H هي $5-$ زمرة جزئية سيلوفية في G مرتبتها 5 **وعدد هذه الزمر الجزئية يساوي $5H + 1$ ويجب أن يقسم مرتبة G .**

$K = 0$ 1 مقبول

$K = 1$
$K = 2$
$\begin{cases} 6 \\ 11 \end{cases}$ مرفوض

وهذا أيضا نلاحظ أن لأجل $K \neq 0$ فإن العدد $5K + 1$ لايقسم مرتبة G وبالتالي توجد زمرة جزئية واحدة فقط من الشكل : $5-$ زمرة جزئية سيلوفية في G مرتبتها 5 واحدة فقط وبالتالي فهي ناظمية .

أصبح لدينا K, H زمرة جزئية ناظمية في G ومن فإن $K.H$ زمرة جزئية في G

$$G = H \times K$$

" انتهت المحاضرة "

نوه الدكتور أن اسئلة الامتحان تأتي من المقرر المعطى ولا يوجد اي اسئلة خارجية

بذلك تكون قد نكون أنهينا المحاضرة الأخيرة آملين أن نكون قد قدمنا لكم مادة مفيدة

وراجين الله تعالى أن يوفقكم في جميع المواد وأن يوفقنا في تطوير كل ما نقدمه لكم في سبيل

تطوير رياضياتنا .

مع تحيات فريق سيريا ماث التطوعي ^_^