نظرية Frank Ramsey :

هي نظرية Ramsey من بين كل ستة أشخاص يوجد ثلاثة بحيث يعرفون بعضهم البعض (التالي) أو لا يعرفون بعضهم أبدا.

بمعنى آخر (بمعنى رياضي): دائما يوجد نظرية البيان من أجل كل بيان بسيط $G(V,E)$ ، $|V|=6$ فإما $K_3 \subseteq G$ أو $\overline{K_3} \subseteq G$ وهذا يتعلق بأعداد الدالة في مجال إيجاد الأعداد Ramsey.

تسمى أعداد Ramsey في نظرية الاحتمالات (هاتف وانترنت وشبكات) في عام 1935 قام Erdos و Szekeres بتطوير فكرة Ramsey وأثبتوا أنه يوجد دائما حل لإيجاد أعداد Ramsey.

تعريف Ramsey Number :

من أجل عددين $R(s,t)=p$ يكون عدد Ramsey $s,t \in Z^+$ هو أقل عدد صحيح موجب حيث أن كل بيان بسيط G من المرتبة p يحوي البيان K_s أو يحوي $\overline{K_t}$ ويقول عندئذ أن عدد Ramsey هو أقل عدد صحيح حيث يكون البيان من مرتبة هذا العدد يحوي البيان الجزئي K_s أو يحوي $\overline{K_t}$ بعدد قليل.

مبرهنة:

أي بيان بسيط من المرتبة 6 إما أنه يحوي K_3 بيان جزئي أو يحوي المتمم $\overline{K_3}$ كبيان جزئي أي: إما $K_3 \subseteq G$ أو $\overline{K_3} \subseteq G$

الإثبات:

لتكن $v \in V(G)$ حيث نعلم أن البيان من الدرجة 6

لدينا جادرات المقدة في البيان G : $N(v,G)$

وجادرات المقدة في البيان $\overline{G}$ (المتمم): $N(v,\overline{G})$

عندئذ يكون:

(Mob; 0944-879460 / Pho: 011-2151436) خدمات كلية العلوم – دمشق خرم كلية العلوم Plus

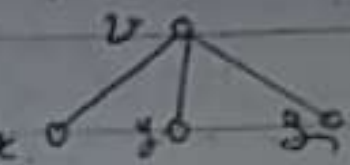
Scanned by CamScanner

$N(v, G) \cdot N(v, \bar{G}) = 6$

عندئذٍ إما $N(v, G) \geq 3$ أو $N(v, \bar{G}) \geq 3$

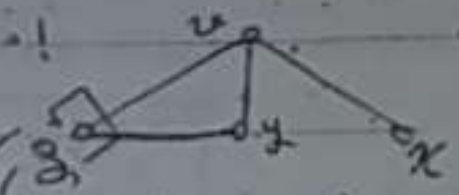
لبرهنة أن: $N(v, G) \geq 3$. ولنفرض أن x, y, z مجاورات العقدة v في البيان G عين الحالتين

آ- إذا كانت العقد x, y, z غير متجاورة



فتكون متجاورة في البيان المتمم $\Rightarrow k_3 \subseteq \bar{G}$

ب- إذا كانت عقدتان متجاورتان ولتكن مثلاً z تجاور y



$\Rightarrow k_3 \subseteq G$

برهنة:

لكل s, t عددين صحيحين موجبين أكبر من 1 عندئذٍ فإن $R(s,t) \cdot R(t,s)$ أول أنه الحدين درجة ذروة ممكن.

برهنة: $r_s \geq 1 \Rightarrow R(s, 1) = 1$

الإثبات: لأن متمم أي بيان غير تام تحوي على الأقل عقدة.

برهنة: $r_s \geq 1 \Rightarrow R(s, 2) = s$

الإثبات: إذا كان لدينا البيان البسيط G من المرتبة s بيان غير تام لأي أن البيان المتمم له تحوي k_2 أي: (G من المرتبة s غير تام $\Leftarrow \bar{G} \subseteq k_2$)

ومنه نستنتج أن $R(s, 2) \leq s$

لنثبت أن $R(s, 2) \geq s$ ؛

لنأخذ البيان k_{s-1} هذا البيان لا يمكن أن تحوي البيان k_2 كبيان جزئي عندئذٍ البيان $\overline{k_{s-1}}$ لا تحوي أي ضلع $\Leftarrow R(s, 2) \geq s \Leftarrow R(s, 2) = s$

(Mob: 0944-879460 / Pho: 011-2151436) خدمات كلية العلوم – نضوج جزء كلية العلوم Plus

Scanned by CamScanner

مبرهنة:

لتكن $s \geq 3, t \geq 3$ عددين صحيحين، فإن:

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$$

علماً أنه إذا كان العددان $R(s-1,t)$ و $R(s,t-1)$ زوجيان فإن:

$$R(s,t) < R(s-1,t) + R(s,t-1)$$

حساب أعداد Ramsey (رمزي):

s \ t	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4	9	18	25				

نبين أنه صحة ما يلي: $R(3,4) = 9$

$s = 3$ $\quad$ $t = 4$

الحل حسب المبرهنة السابقة:

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$$

$$\Rightarrow R(s,t) \leq R(2,4) + R(3,3)$$

$$R(s,t) \leq R(2,4) + 6$$

$$\leq R(4,2) + 6$$

// $R(4,2) = 4$ حسب مبرهنة سابقة ($R(s,2) = s$ ، $s \geq 1$) //

$$\leq 4 + 6 = 10$$

بما أن 4، 6 زوجيان فإن حسب مبرهنة $\Rightarrow R(s,t) \leq 10 - 1 = 9$

توضيح: $\Leftarrow$ لدينا $R(s-1,t) = 4, R(s,t-1) = 6$ عددان زوجيان

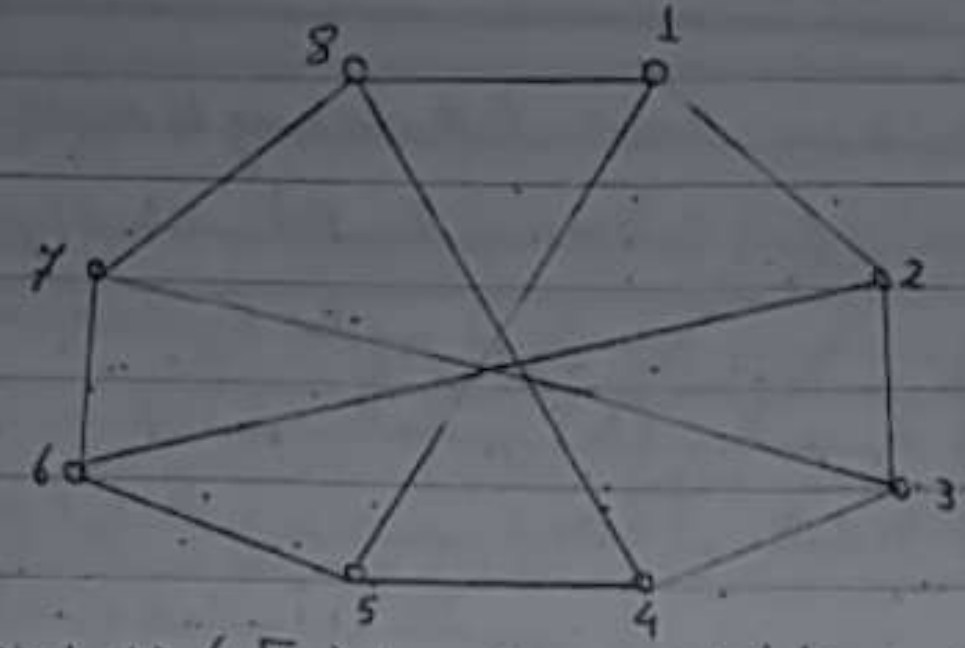
$$R(s,t) < 4+6 \Rightarrow R(s,t) < 10 \text{ أي } R(s,t) \leq 9$$

لنبين أن: $R(s,t) \geq 9$ وهي تكافئ $R(s,t) > 8$

(Mob; 0944-879460 / Pho: 011-2151436) خدمات كلية العلوم - دمشق حرم كلية العلوم Plus

Scanned by CamScanner

رسم البيانة:

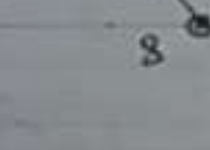


إن هذا البيان لا يحوي k_3 ولا يحوي متمم k_4 ($\overline{k_4}$). إذا إضافة أي ضلع يخفف هذه الخاصية

وبالتالي هذا البيان يحقق ما يلي: $R(3,4) > 8$

$\Longrightarrow R(3,4) = 9$

لنذكر أن البيان k_3 هو بيان له ثلاث رؤوس.



نلاحظ أننا رسمنا الكلة السابقة فيها لا يحوي بياناً جزئياً ثلاث رؤوس.

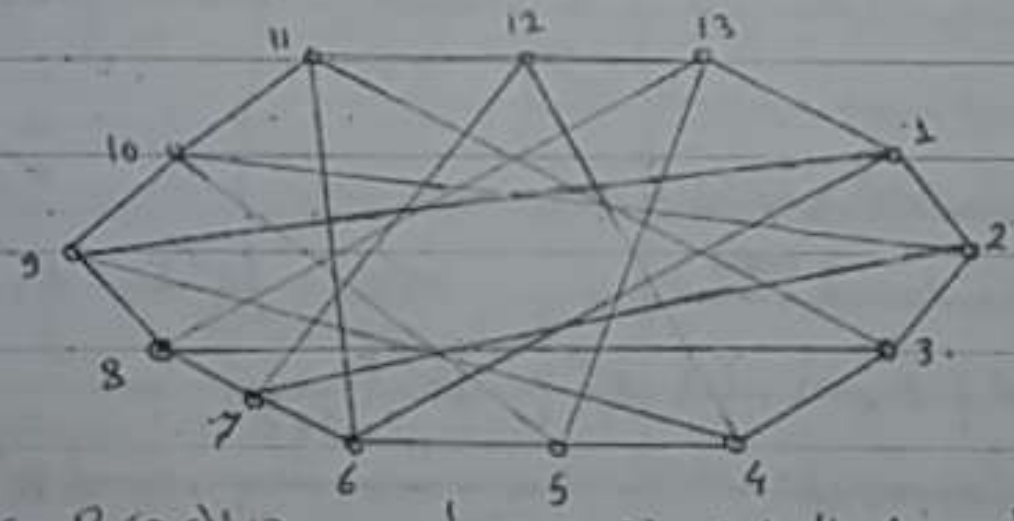
⑤ لنثبت أن $R(3,5) = 14$

$R(3,t) \leq R(3-1,t) + R(3,t-1)$

$R(3,5) \leq R(2,5) + R(3,4)$ ← حسب النتيجة السابقة

$R(3,5) \leq 5 + 9 = 14$

لنثبت أن $R(3,5) \geq 14$ وهي تكافئ $R(3,5) > 13$ أي يكفي أن نجد بيان G من المرتبة 13 بحيث أن هذا البيان لا يحوي k_3 ولا يحوي متمم k_5 ($\overline{k_5}$)



إن إضافة أي ضلع للبيان يجعله حاوياً k_3 أو $\overline{k_5}$

$R(3,5) = 14 \Leftarrow R(3,5) > 13$

(Mob; 0944587460 / Pho: 011-2151436) خدمات كلية العلوم - دمشق حرم كلية العلوم Plus

Scanned by CamScanner

وظيفة: / خوارزمية الـ Matching /

تريد جامعة دمشق إبعاد مجموعة من الطلاب لإتمام دراستهم الجامعية.
عدد الطلاب المتقدمين هو 5 طلاب (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)
في حال الاختصاصات التالية: الطب (M) - الهندسة (Eng) -
الفيزياء (ph) - الرياضيات (Math) - واللغة الإنكليزية (E).

S_1 - يرغب التقدم للطب أو الإنكليزي.

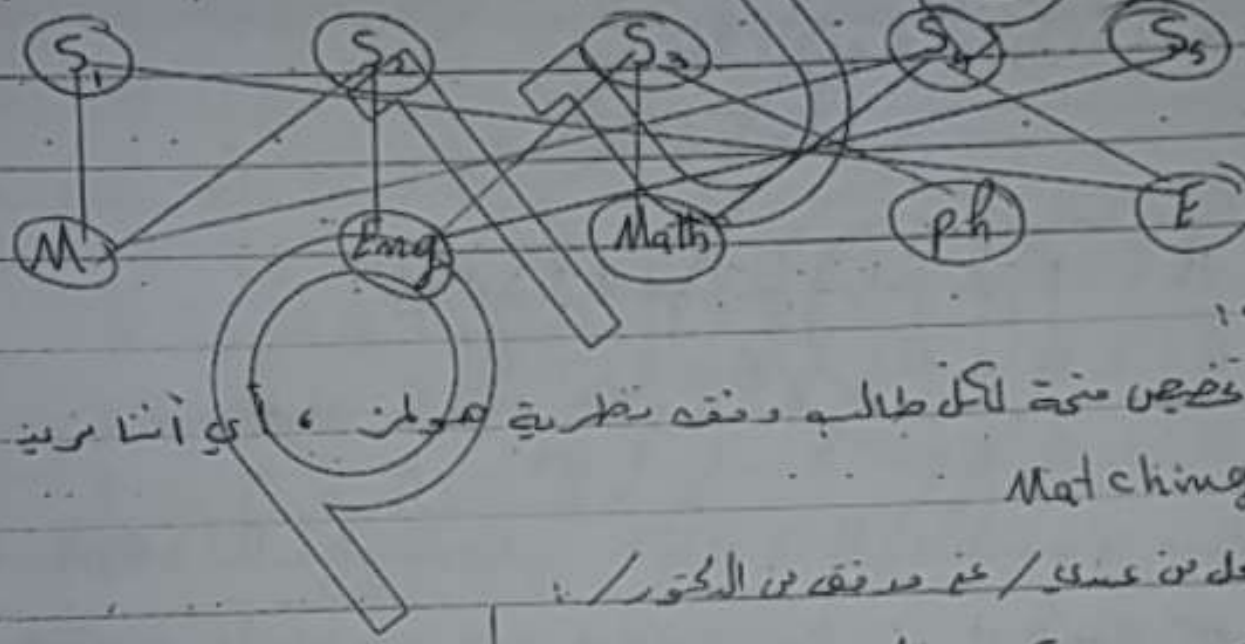
S_2 - يرغب بالتقدم للطب أو الهندسة.

S_3 - يرغب بالتقدم للهندسة أو الرياضيات أو الفيزياء.

S_4 - يرغب بالتقدم للطب أو الرياضيات أو الإنكليزي.

S_5 - يرغب بالتقدم للهندسة.

نمثلهم بيانياً:



والسؤال:

هل يمكن تخصيص مادة لكل طالب وفق نظرية Matching، أي أننا نريد أحسن مجموعة

- كفكرة للحل من عندي / ثم مدقق من الدكتور /:

	E	Math	ph	Eng	M	
S_1	✓				✓x	S_1
S_2				✓x	✓	S_2
S_3		✓	✓x	✓x		S_3
S_4	✓x	✓			✓x	S_4
S_5			✓			S_5

جدول (ph) لم يبقى إلا S_3 فيأخذ مادة الفيزياء ويلغى باقي مادته (Math - Eng).
بما أنه أخذ S_3 للـ Math التي، بقي S_4 يتقدم للمادة (Math) فيأخذها.. ويلغى باقي مادته (M - E).. أصبح لـ E متقدم S_1 فيأخذها ويلغى باقي مادته (M).. أصبح لـ M متقدم S_2 فيأخذها ويلغى باقي مادته (Eng).. أصبح لـ Eng متقدم S_5 فيأخذها.

انتهت المحاضرة

Scanned by CamScanner

سنكمل في هذه المحاضرة نظرية الأستاذ

من انتظار محدد limited queue (خانة حدية واحدة):

هذا النظام كثير من التطبيقات العملية تتبع لضيق مكان الانتظار أو عدم استيعاب خانة الخدمة مثلاً:

إذا اعتبرنا الطبيب خانة خدمة وبالمكان الطبيب فيمن 40 مريض في اليوم الواحد وبالتالي يجب أن نحدد طول صف الانتظار بشكل عام نفترض طول صف الانتظار هو L بمعنى أنه لا يمكن وجود مراجع مريض لعدم سعة المكان أو لعدم إمكانية تأدية الخدمة.

$\lambda_n = \lambda$ (معدل الوصول)، وهنا يجب أن أي عدد يأتي بعد L $\{n > L \rightarrow 0\}$ صفر مثلاً.

تأدية الخدمة: $\mu_n = \mu$ (لأن خانة الخدمة واحدة)

احتمال وجود n زبون في النظام هو P_n حيث $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$ ، $n \leq L$

وعندما $(n > L) \Leftarrow P_n = 0$

نعلم أن مجموع الاحتمالات: $\sum_{n=0}^{L} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = 1$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{L} \varphi^n}$$

حيث $\varphi = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$

إن المجموع $\sum_{n=0}^{L} \varphi^n$ هو متسلسلة هندسية حيث: $\varphi < 1$

حدها الأول 1 وعدد حدودها $L+1$ وأساسها φ عندئذ يكون:

$$\sum_{n=0}^{L} \varphi^n = \begin{cases} \frac{1-\varphi^{L+1}}{1-\varphi}, & \varphi \neq 1 \\ L+1, & \varphi = 1 \end{cases}$$

$$P_0 = \begin{cases} \frac{1-\varphi}{1-\varphi^{L+1}}, & \varphi \neq 1 \\ \frac{1}{L+1}; & \varphi = 1 \end{cases}$$

(Mob; 0944-879460 / Pho: 011-2151436) خدمات كلية العلوم ـ دمشق حرم كلية العلوم Plus
Scanned by CamScanner

أن كثافة الأزدحام في تلك الحالة ستكون أكبر من واحد وتجب حالة عدم الرضا بين المرضيين، لذلك يجب علينا أخذ احتمالات الرفض بعين الاعتبار عند تصميم الأنظمة، ونعني الاحتمال السابق احتمال أن الصف ممتلئ عندئذٍ يكون احتمال الرفض P_L (احتمال رفض زبون قادم):

$$P_L = \varphi^L P_0$$

$$P_L = \varphi^L \frac{1-\varphi}{1-\varphi^{L+1}} \quad ; \varphi \neq 1$$

$$\frac{\varphi}{1+L} \quad ; \varphi = 1$$

إذا كانت $\varphi > 1$ فإن النظام يحتاج إلى وقت طويل جداً للوصول إلى الاستقرار يمكن الحصول على متوسط عدد الزبائن في النظام من خلال العلاقة التالية:

$$L_s = \sum_{n=0}^{L} n \varphi^n \quad ; \varphi \neq 1$$

$$L_s = \frac{\varphi}{1-\varphi} - \frac{(L+1)\varphi^{L+1}}{1-\varphi^{L+1}} \quad ; \varphi \neq 1$$

$$\frac{L}{2} \quad ; \varphi = 1$$

إذا اقتربت φ إلى قيمة كبيرة جداً، واقتربت L إلى قيمة كبيرة جداً فإن متوسط عدد الوحدات يساوي $\frac{\varphi}{1-\varphi}$.

الوصلات القادمة من مصدر محدد:

هذا النوع من الأنظمة تطبيقات كثيرة في حياتنا مثلاً: عدد الموظفين المستخدمين في تشغيل آلة نسخ حيث أن مجتمع الموظفين هو مجتمع محدد. نقصد في هذه الدراسة بـ قناة خدمة واحدة وصف انتظار واحد، حيث أن معدل الوصول يتأثر عند وجود سبعة عناصر المجتمع (الموظفين) إلى صف الانتظار، أما إذا كانت جميع عناصر المجتمع في صف الانتظار يصبح معدل الوصول مساوياً للصفر.

3 (Mob: 0944-879460 / Pho: 011-2151436) مجدماك كلية العلوم – دمشق حرم كلية العلوم Plus

Scanned by CamScanner

نفترض حالة تطبيقية لأعمال صيانة الآلات بحيث أن عدد الآلات التي يتم إصلاحها من قبل منزه هي m، تتوقف هذه الآلات عن العمل بصورة عشوائية بين فترة زمنية وأخرى، بافتراض تصليح كل آلة يكون تقريبه حسب توزيع أسي سالب ومعدل $\frac{1}{\mu}$، إن توقف الآلة يكون عشوائياً مثلاً دقيقة توزيع احتمالي أسي معدل $\frac{1}{\lambda}$ لكل آلة

احتمال P_n هو احتمال توقف n آلة حيث: $n = 0, 1, \dots, m$

إن معدل الوصول يكون أقل كلما كان عدد الآلات العاملة أكثر، بشكل عام معدل الوصول $\lambda_n = n\lambda$ $(\lambda_0 = m\lambda)$ عندما تكون جميع الآلات صالحة للعمل، يعبر معدل الوصول m مضروباً بمعدل العطل λ وبالتالي يكون: $\lambda_1 = (m-1)\lambda$

$\lambda_2 = (m-2)\lambda$

$\lambda_m = 0$

عندما تكون جميع الآلات - في الكلام عن معدل الوصول يكون 0.

- وبما أن قناة الخدمة واحدة فتكون معدلات الخدمة على الشكل التالي:

$\mu_1 = \mu, \quad \mu_2 = \mu \quad \dots \quad \mu_m = \mu$

بصورة عامة P_j احتمال يأتي:

$$P_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j P_0$$

$$P_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j} P_0 = \frac{m\lambda(m-1)\lambda \cdots (m-j+1)\lambda}{\underbrace{\mu \cdots \mu}_{j}} P_0$$

$$P_j = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-j+1)\lambda^j}{\mu^j} P_0$$

$$P_j = \frac{(m-j-1)!\, m(m-1)\cdots(m-j)}{(m-j-1)!} \frac{\lambda^j}{\mu^j} P_0 = \frac{m!}{(m-j-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j P_0$$

بنفس الطريقة نجد أن:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{m} \frac{m!}{(m-j-1)!} \varphi^j}$$

4 (Mob; 0944-879460 / Pho: 011-2151436) Plus خدمات كلية العلوم – دمشق حرم كلية العلوم

Scanned by CamScanner

إذن نجد أن: $L_s = m - m\frac{\varphi^{m-1}}{\rho^m}$

تمارين:

1) الطريق الواصل من دمشق إلى حلب تعرض صيانة وإصلاح لسيارات الخدمة على هذا الطريق (سيارات عنده خاصة لشركة)، مدة صيانة السيارة تختلف من سيارة إلى أخرى حسب الحالة وتتبع توزيع أسي معدله دقائق، وصل السيارة إلى مكان الصيانة يتبع توزيع بواسون معدل وصول السيارات في الساعة

كلفة انتظار السيارة الواحدة 3.00 ل.س في الساعة (تحدد على أساس الربح الذي تحققه السيارة مؤجرة)

كلفة صيانة السيارة 6.00 ل.س أجر عامل

المطلوب:

1) متوسط عدد السيارات في النظام

2) متوسط زمن الانتظار للسيارة في النظام

3) متوسط طول صف الانتظار

4) متوسط زمن انتظار السيارة في صف الانتظار

5) الكلفة الكلية لصيانة السيارة

ارسم مخطط يبين العلاقة بين كثافة الازدحام (ρ) ومتوسط عدد السيارات في النظام

الحل: إذا كان معدل وصول السيارات إلى الورشة هو وفق توزيع بواسون معدله 8 سيارات في الساعة $\Leftarrow \lambda = 8$

معدل الخدمة يساوي μ، سنقدر خدمة الزمن هي الساعة عشرين، سيصلح الصيانة $12 = \frac{60}{5} = 4$، الكثافة أو الازدحام $= \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$، وهذا يعني أن كل الزمن يكون فيه العامل مشغول بصيانة السيارة والثلث الآخر يكون فيه عاطل

$$L_s = \frac{\varphi}{1-\varphi} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2$$ (معدل الأعطال)

5 (Mob; 0944-879460 / Pho: 011-2151436) خدمات كلية العلوم – دمشق حرم كلية العلوم Plus

Scanned by CamScanner

نفرض لدينا زمن انتظار السيارة في المحطة : W_s

$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{4}$.

أي سيارة كل دقيقة (ربع ساعة)

متوسط طول صف الانتظار : $L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{4}{3}$ (سيارة في الصف)

متوسط زمن انتظار السيارة في الصف $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{8}{12(12-8)} = \frac{1}{6}$

الكلفة الكلية = كلفة الانتظار + كلفة الصيانة (ثابتة) .

الكلفة الكلية = كلفة الانتظار + 1000

1000 + 750 ⇒ 1750

حيث كلفة الانتظار = كلفة الانتظار في الساعة X عدد ساعات الانتظار

$\frac{1}{4}$ X 3000 = 750

تمرين (2) :

تقوم احدى محطات التحميل الحربية بتحميل قاطرات النقل، أثناء التحميل إذا قصدت قاطرة حربية تنتظر دورها حتى تصل القاطرات إلى محطة التحميل وفق توزيع إحصائي أسي وبمعدل 4 بالساعة، الزمن المتوقع لتقديم الخدمة ساعتين، علماً أن هذا التشغيل وفق توزيع إحصائي عشوائي ويتناسب عكساً مع عدد العمال في المجموعة، كلفة كل عامل 1000 ل.س في الساعة .

كلفة انتظار القاطرة 3000 ل.س في الساعة

المطلوب : تحديد عدد العمال الأمثل في المجموعة بحيث يكون مجموع الكلفة الكلية أقل ما يمكن .

الحل : نفرض عدد العمال K عامل .

كل عامل بإمكانه تقديم خدمة إلى نصف قاطرة في الساعة الواحدة وبذلك يكون معدل الخدمة لكل العمال هو : $\mu = \frac{K}{2}$.

معدل الوصول هو عدد القاطرات في الساعة .

(Mob; 0944-879460 / Pho: 011-2151436) خدمات كلية العلوم – دمشق حرم كلية العلوم Plus

Scanned by CamScanner

كثافة الاستخدام ρ : $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{k}{2}}{1} = \frac{k}{2}$

الكلفة الكلية المتوقعة في الساعة عملياً

= 2 × k + (8 عدد ساعات العمل) × (عدد المتطوعات المتوقع إلى الظام)

$$= 2 \times k + 8 \times \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \boxed{2k + \frac{16}{k-2}} \quad *$$

k (عدد العمال) =	2	3	4	5	6	7
الكلفة المتوقعة في الساعات	∞	22	16	15.3	16	16.3

أعطينا الجدول تبعاً لقيم k المختلفة *

نلاحظ أنه أفضل عدد من العمال المأهلين في هذه الحطة سيادي 5 بهذا العدد المتبقي لا أقل كلفة

انتهت المحاضرة

انتهى - ١٢ -

Plus خدمات كلية العلوم - دمشق حرم كلية العلوم (Mob; 0944-879460 / Pho: 011-2151436)

Scanned by CamScanner