Syria Math

# هندسة تحليلية


الدكتورة : ميسم جديد


المحاضرة : الثالثة عشرة


إعداد : منى + راما

١

الإثنين / 28 / 11 / 2016

## المنحنيات في الفراغ.

وجدنا سابقاً أن المستقيم يعطى بتقاطع مستويين أي يعرف بمعادلتي مستوي.

وكذلك الأمر بالنسبة للمنحني في الفراغ فهو يعطى بتقاطع سطحين أي يعرف بمعادلتي السطحين فإذا كان لدينا السطحين $S_1, S_2$ حيث $S_1$ معطى بالمعادلة:

$$S_1 = f_1(x, y, z) = 0$$

و $S_2$:

$$S_2 = f_2(x, y, z) = 0$$

عندئذٍ يكون المنحني $C$ الناتج من تقاطع السطحين معطى بالعلاقة

$$C \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \ldots (1)$$

تعبر العلاقة (1) عن الشكل الديكارتي لمعادلتي المنحني $C$ كذلك الأمر كما رأينا سابقاً أن المستقيم يعطى وسيطياً فإن المنحني $C$ أيضاً يعطى وسيطياً بالمعادلات التالية:

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

حيث $t$ وسيط متحول

وتجدر الإشارة هنا إلى أنه يمكن الانتقال من الشكل الوسيطي إلى الشكل الديكارتي بحذف الوسيط.

**مثال:**

ليكن لدينا المنحني $C$ المعطى ديكارتياً:

$$x = (y+1)^2 + 1$$
$$z = -(y+1)^2$$

للانتقال إلى الشكل الوسيطي نقوم بفرض أحد المتحولات وسيط $t$ ثم نعوض

Subject: هندسة تحليلية

معادلتي المنحني.

نفرض: $y + 1 = t \Rightarrow \boxed{y = t - 1}$

$$x = t^2 + 1$$
$$z = -t^2$$

انتقلنا من الديكارتي إلى الوسيطي.

## مساقط منحني على المستويات الإحداثية

لكي نتمكن من تصور المنحني في الفراغ نقوم بدراسة مساقطه على المستويات الإحداثية فإذا كان المنحني $C$ معطى بالمعادلات (1) فإننا نقوم بحساب أحد المتحولات $z$ مثلاً بدلالة المتحولين $x, y$ من إحدى المعادلتين ثم نعوضه في المعادلة الأخرى فنحصل على علاقة بـ $x$ و $y$ هذه المعادلة الناتجة هي معادلة مسقط المنحني على المستوي $xoy$.

وبنفس الطريقة بالنسبة لمساقط المنحني على المستويات الأخرى.

أما إذا كان المنحني معطى بالمعادلات الوسيطية $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$

فلإيجاد المسقط على $xoy$ مثلاً

نقوم بحذف الوسيط من المعادلتين:

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

نحصل على علاقة بـ $x, y$ وهي معادلة المسقط.

**مثال:** ليكن لدينا المنحني $C$ المعطى بالمعادلات التالية:

$$x = \frac{t}{t+1}, \quad y = t - 1$$

$$z = \frac{t-1}{t+1}$$

AL SAMRAH

Subject: (2)

ومعطى وسيطياً بالمعادلتين:

$$y = \frac{1}{x-1} \quad , \quad z = 2x-1$$

المطلوب:

أوجد مساقط المنحني على المستويات الإحداثية

المسقط على $xoy$:

$$\boxed{y = \frac{1}{x-1}}$$

وهي معادلة قطع زائد.

المسقط على $zoy$:

$$\boxed{y = \frac{2}{z-1}}$$

أيضاً هي معادلة قطع زائد.

المسقط على $zox$:

$$z = \boxed{z = 2x-1}$$

تمثل معادلة مستقيم.

معادلتي المستقيم المماس، ومعادلة المستوي الناظم لمنحني في الفراغ....

ليكن لدينا المنحني $C$ المعطى بتقاطع السطحين $S_1$ و $S_2$ الممثلين بالمعادلتين:

$$f(x,y,z)=0$$
$$g(x,y,z)=0$$

عندئذٍ يعطى $C$ بالعلاقة:

$$C: \begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$$

لإيجاد معادلة المستقيم المماس لهذا المنحني يجب أن نجد أولاً منحى هذا المماس

إن المماس للمنحني في نقطة منه يكون مماساً للسطحين $S_1, S_2$ أي أنه يعامد ناظمي السطحين وبالتالي يعامد مركباته من الـ... الخارجي لناظمي السطحين فإذا كان $N_1$ ناظم $S_1$ و $N_2$ ناظم $S_2$

عندئذٍ $\vec{T}$ يساوي:

$$\vec{T} = \vec{N_1} \wedge \vec{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \end{vmatrix}$$

$$u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

وعليه فإن معادلتي المستقيم المماس:

$$\frac{X-x}{u} = \frac{Y-y}{v} = \frac{Z-z}{w}$$

معادلة المستوي الناظم:

$$u(X-x) + v(Y-y) + w(Z-z) = 0$$

مثال:

أوجد معادلتي المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم للمنحني $C$ المعطى بـ:

$$C: \begin{cases} f \equiv x^3 - 2yz + y + z - 2 = 0 \\ g \equiv 2x^2 + 3xy - 2 = 0 \end{cases}$$

بالنقطة $M_0(1,0,1)$

الحل:

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 \\ f'_y &= -2z+1 \\ f'_z &= -2y+1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{نعوض } M_0} \begin{aligned} f'_x &= 3 \\ f'_y &= -1 \\ f'_z &= 1 \end{aligned}$$

$$\vec{N_1}(3,-1,1)$$

AL SAMRAH

3

Subject :

$g'_x = 4x + 3y$
$g'_y = 3x$
$g'_z = 0$
$\xRightarrow{M_0}$
$g'_x = 4$
$g'_y = 3$
$g'_z = 0$

$\vec{N_2}\,(4, 3, 0)$

$\vec{T} = \vec{N_1} \wedge \vec{N_2}$ ,
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

نفك المحدد بالسطر الأول :

$= -3\vec{i} + 4\vec{j} + 13\vec{k}$

ملاحظة ثانية :

أما إذا كان المنحني معطاً وسيطياً بالعلاقات ② فإن مركبات المنحني المستقيم المماس

② ... $x = x(t)$ , $y = y(t)$ , $z = z(t)$

$\vec{T}\,(x'_t, y'_t, z'_t)$

عندئذٍ تكون معادلتي المماس :

$$\frac{X - x}{x'_{(t)}} = \frac{Y - y}{y'_{(t)}} = \frac{Z - z}{z'_{(t)}}$$

مثال: أوجد معادلتي المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم للمنحني C المعطى وسيطياً بالمعادلات :

$x = 2e^{t}$ ... (1)
$y = te^{t-1}$ ... (2) عندما $\boxed{t = 1}$
$z = e^{t^2}$ ... (3)

الحل:

$x'_t = 2e^{t}$
$y'_t = e^{t-1} + te^{t-1}$
$z'_t = 2te^{t^2}$

نعوض :

$x'_{(1)} = 2e$
$y'_{(1)} = 2$
$z'_{(1)} = 2e$

نعوض في المعادلات الثلاث ثم نعوض :

$$\frac{X - x}{x'_t} = \frac{Y - y}{y'_t} = \frac{Z - z}{z'_t}$$

AL SAMRAH