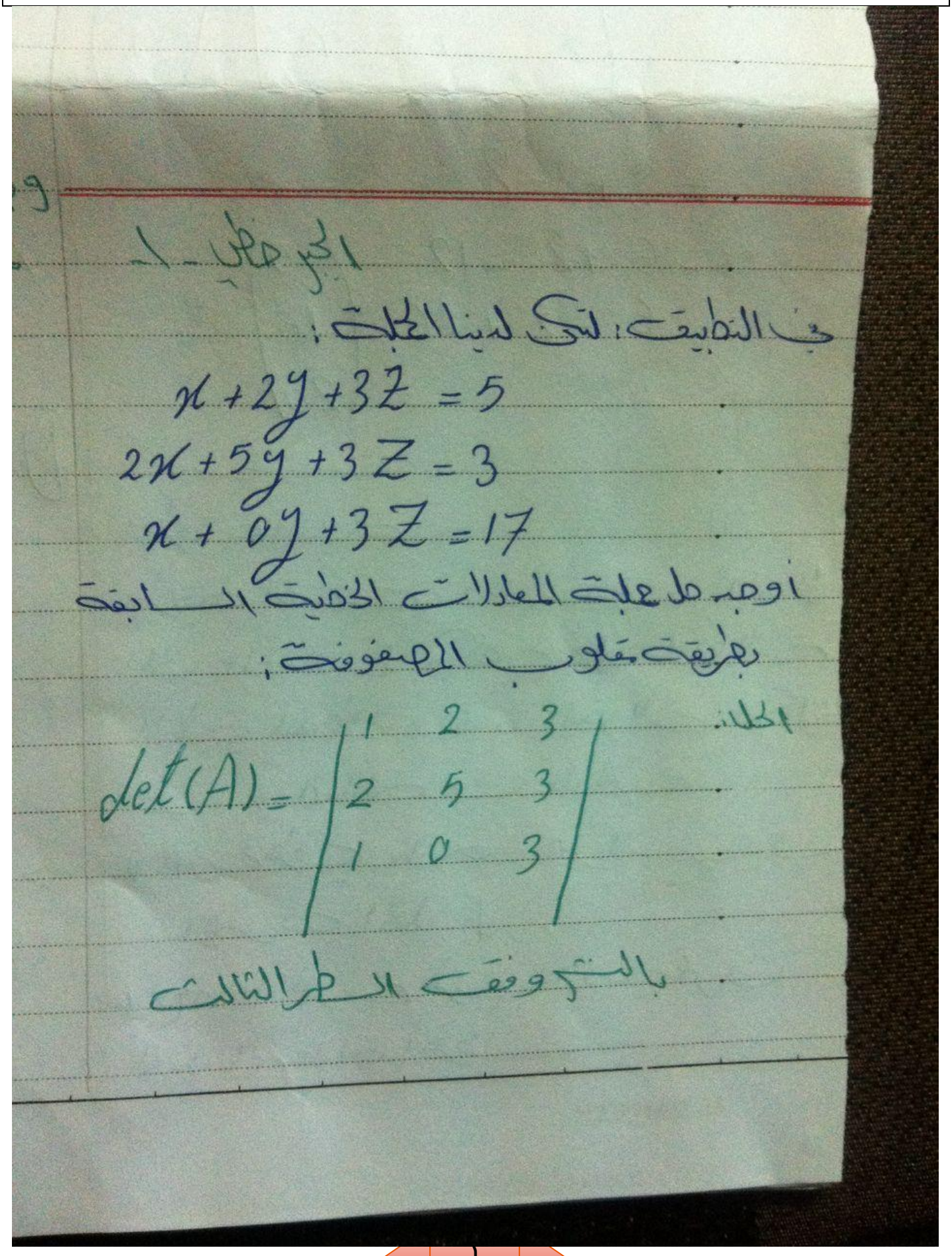
جبر خطي ١

الدكتورة: شغف زوربا

المحاضرة : الثالثة عشر

إعداد : منى



مثال-١-

في التطبيق: لتكن لدينا الجملة:

$$x+2y+3z=5$$
$$2x+5y+3z=3$$
$$x+0y+3z=17$$

أوجد حلول المعادلات الخطية السابقة بطريقة مقلوب المصفوفة:

الحل:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix}$$

بالتوفيق في الطرح الثالث

Syria Math

Subject :

$$\det(A) = 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 0 + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -9 + 8 = -1 \neq 0$$

← بما أن المحدد مقلوب للمقلوب.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

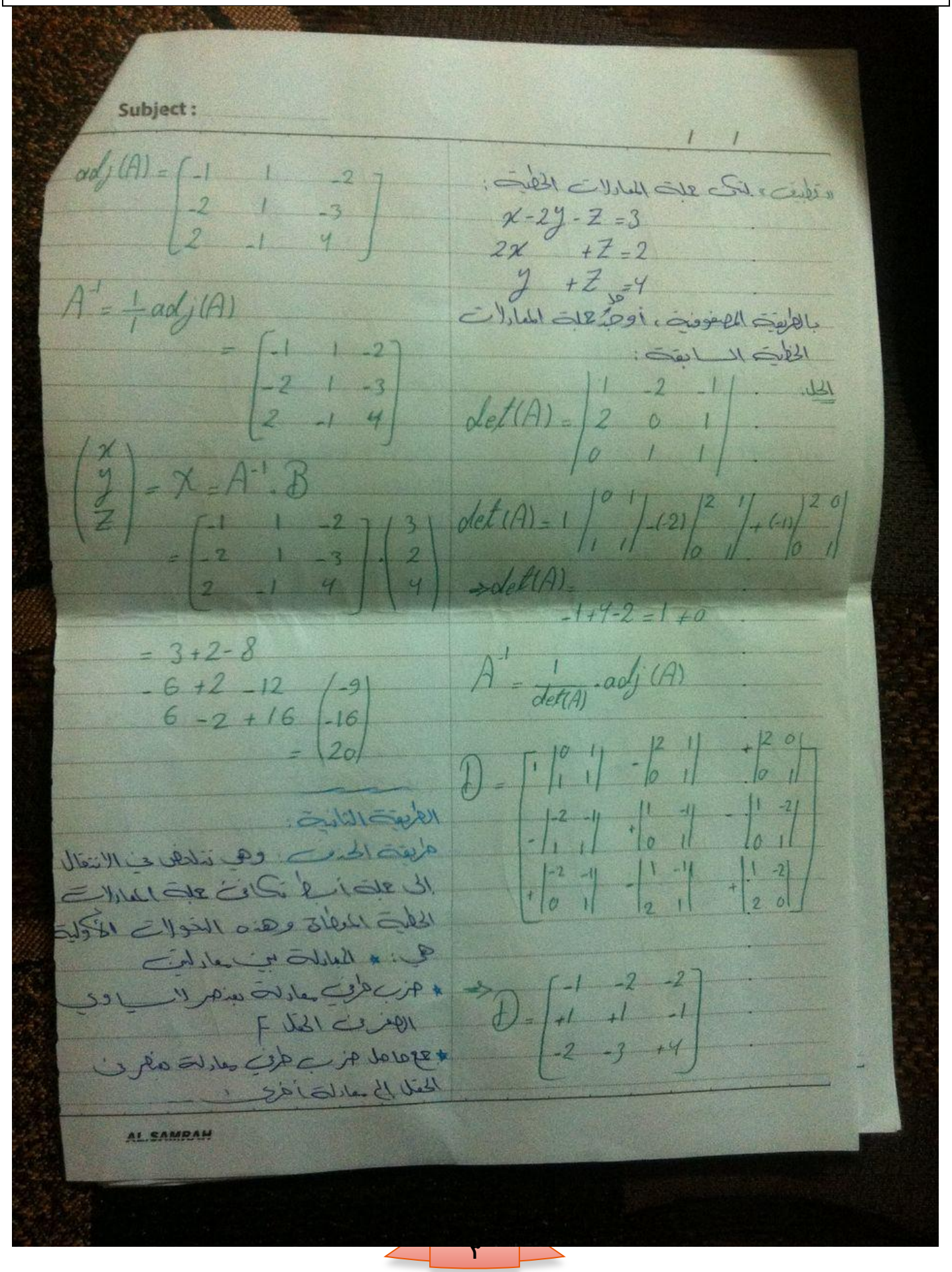
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

وبالتالي حل جملة المعادلات في هذا المثال مقلوب مصفوفة يكون:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X = A^{-1} \cdot B$$

$$= \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Subject :

« تطبيق » لنحل جملة المعادلات الخطية :

$$\begin{cases} x-2y-z=3 \\ 2x+z=2 \\ y+z=4 \end{cases}$$

بالطريقة المصفوفية ، أوجد حلّ جملة المعادلات الخطية السابقة :

الحل.

$$det(A)=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$det(A)=1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow det(A)=-1+4-2=1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{1}{det(A)}\cdot adj(A)$$

$$D=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow D=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ +1 & +1 & -1 \\ -2 & -3 & +4 \end{bmatrix}$$

$$adj(A)=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}adj(A)=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=X=A^{-1}\cdot B=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

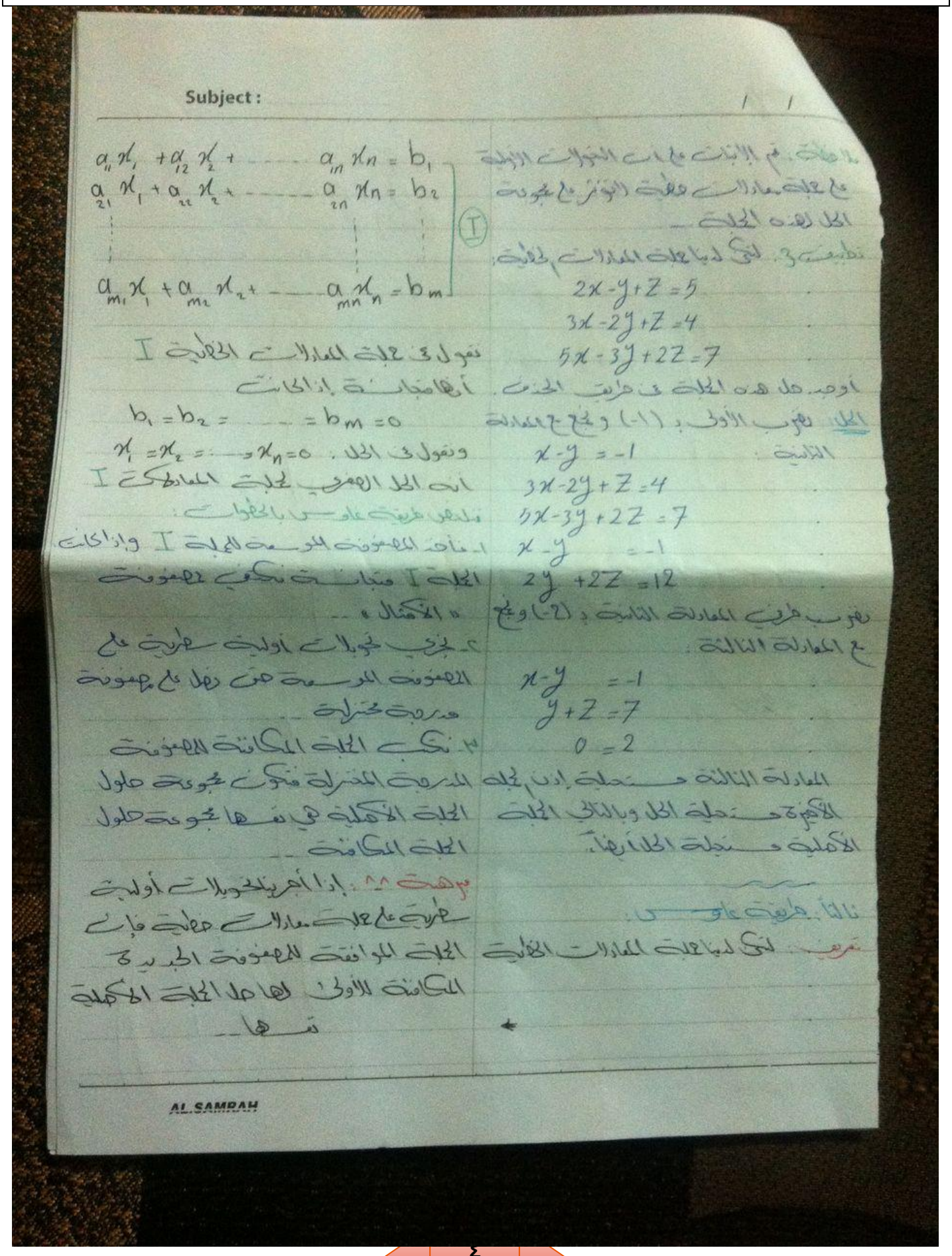
$$=\begin{matrix} 3+2-8 \\ -6+2-12 \\ 6-2+16 \end{matrix}\begin{pmatrix} -9 \\ -16 \\ 20 \end{pmatrix}$$

الطريقة الثانية :

طريقة الحذف : وهي تتلخص في الانتقال الى جملة أبسط تكافئ جملة المعادلات الخطية المعطاة وهذه التحولات الأولية هي :

* المبادلة بين معادلتين
* ضرب طرفي معادلة بعنصر لا ينتمي للحقل F
* جمع حاصل ضرب طرفي معادلة بمقدار من الحقل إلى معادلة أخرى .

AL SAMRAH



Subject :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (I)$$

نقول عن جملة المعادلات الخطية I أنها متجانسة إذا كانت

$b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$

ونقول عن الحل $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ أنه الحل الصفري لجملة المعادلات I

نلخص طريقة غاوس بالخطوات:

١- نأخذ المعنونة الموسعة للجملة I وإذا كانت الجملة I متجانسة نكتفي بالمعنونة « الأمثال »

٢- نجري تحويلات أولية سطرية على المعنونة الموسعة حتى نحصل على معنونة مدرجة مختزلة

٣- نكتب الجملة المكافئة للمعنونة المدرجة المختزلة فتكون مجموعة حلول الجملة الأصلية هي نفسها مجموعة حلول الجملة المكافئة

ملاحظة: إذا أجرينا تحويلات أولية سطرية على جملة معادلات خطية فإن الجملة الموافقة للمعنونة الجديدة المكافئة الأولى لها هي الجملة الأصلية نفسها

ملاحظة: لم أذكر في التعاريف السابقة التحويلات الأولية على جملة معادلات خطية لأن الحل لهذه الجملة

تطبيق 3: لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 5 \\ 3x - 2y + z &= 4 \\ 5x - 3y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

أوجد حل هذه الجملة في حقل الحدود.

الحل: نضرب الأولى بـ (-1) ونجمع مع المعادلة الثانية:

$$\begin{aligned} x - y &= -1 \\ 3x - 2y + z &= 4 \\ 5x - 3y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y &= -1 \\ 2y + 2z &= 12 \end{aligned}$$

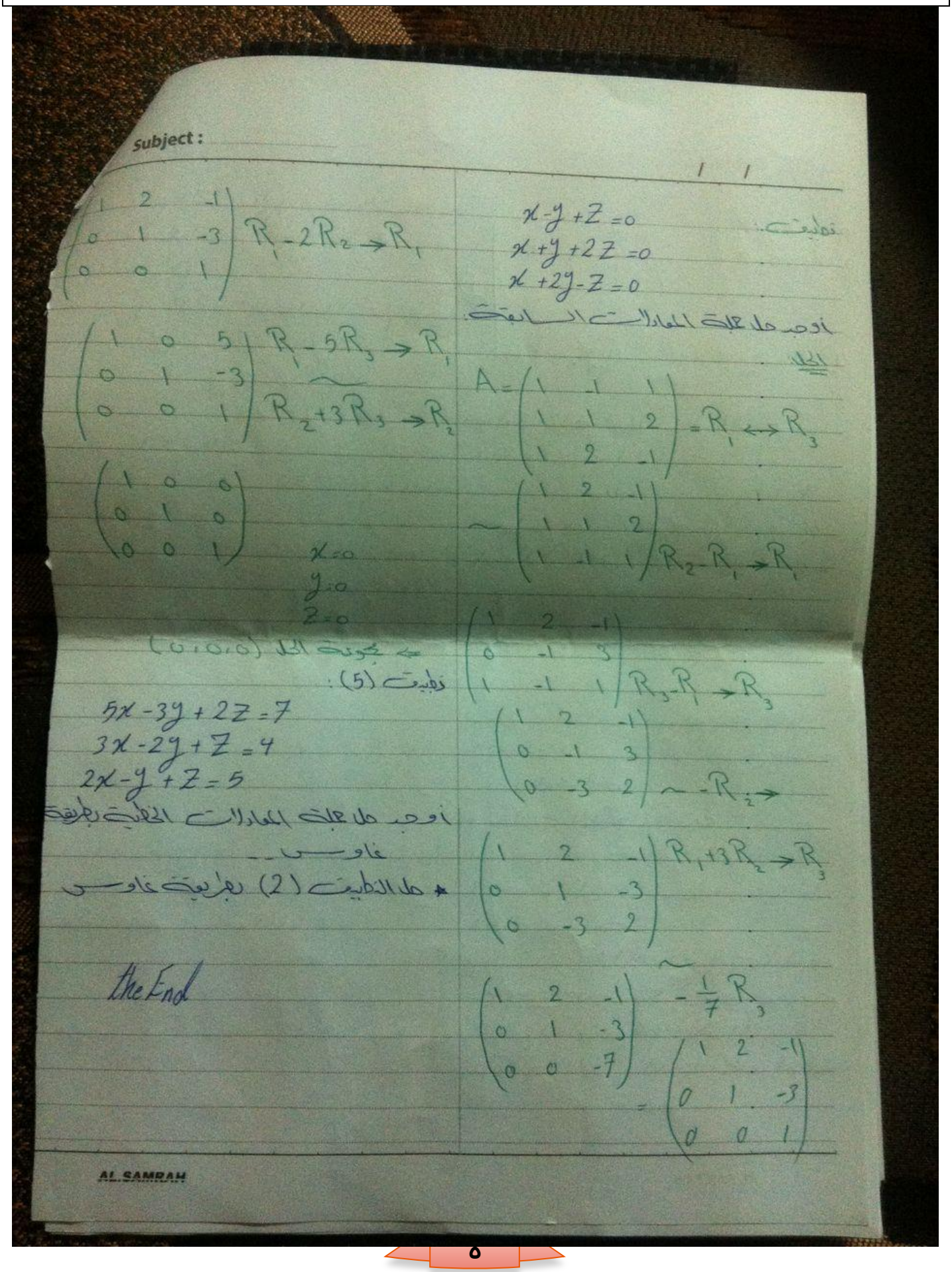
نضرب طرفي المعادلة الثانية بـ (-2) ونجمع مع المعادلة الثالثة:

$$\begin{aligned} x - y &= -1 \\ y + z &= 7 \\ 0 &= 2 \end{aligned}$$

المعادلة الثالثة حسلة إذن جملة الأصل وبالتالي الجملة الأصلية حسلة الحل أيضاً.

ثالثاً: طريقة غاوس:

تعريف: لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية


Subject :
تطبيق.
$x-y+z=0$
$x+y+2z=0$
$x+2y-z=0$
أوجد حل جملة المعادلات السابقة.
الحل
$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&2\\1&2&-1\end{pmatrix}$
$R_1\leftrightarrow R_3$
$\sim\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$
$R_2-R_1\to R_1$
$\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&3\\1&-1&1\end{pmatrix}$
$R_3-R_1\to R_3$
$\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&3\\0&-3&2\end{pmatrix}\sim -R_2\to$
$\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-3\\0&-3&2\end{pmatrix}$
$R_1+3R_2\to R_3$
$\sim$
$\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-3\\0&0&-7\end{pmatrix}$
$-\frac{1}{7}R_3$
$=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$
$R_1-2R_2\to R_1$
$\begin{pmatrix}1&0&5\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$
$R_1-5R_3\to R_1$
$\sim$
$R_2+3R_3\to R_2$
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
$x=0$
$y=0$
$z=0$
$(0,0,0)$ الحل هو ⇐ نجوبة
تطبيق (5):
$5x-3y+2z=7$
$3x-2y+z=4$
$2x-y+z=5$
أوجد حل جملة المعادلات الخطية بطريقة غاوس.
غاوس.
* حل التطبيق (2) بطريقة غاوس
The End
AL SAMRAH