جبر خطي ١

الدكتورة: شغف زوربا

المحاضرة : الخامسة عشرة + السادسة عشر

إعداد : منى

Subject: يوم الأحد ٢٠١٦/١٢/٤

المحاضرة «12»
الجبر خطي «1»

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{array}\right]$$

⟵ نجد أن المعادلة الثالثة مستحيلة الحل فالجملة الأصلية مستحيلة الحل أيضاً

تطبيق (6) الحل: $S = \{(-9, -16, 20)\}$

تطبيق (7): لتكن لدينا المعادلات الخطية:

$$-x + 3y + 6z = 5$$
$$-2x + 5y + 10z = 7$$
$$x - y - 2z = 1$$

أوجد الحل بطريقة غاوس

الحل:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 6 & 5 \\ -2 & 5 & 10 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] -R_1 \to R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -6 & -5 \\ -2 & 5 & 10 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} 2R_1 + R_2 \to R_2 \\ -R_1 + R_3 \to R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right] -R_2 \to R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2R_2 + R_3 \to R_3 \\ 3R_2 + R_1 \to R_1 \end{array}$$

تطبيق (5):

$$5x - 3y + 2z = 7$$
$$3x - 2y + z = 4$$
$$2x - y + z = 5 \qquad R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & 7 \end{array}\right]$$

$$\frac{1}{2}R_1 \to R_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & 7 \end{array}\right]$$

$$-R_1 + R_2 \to R_2 \sim$$
$$-5R_1 + R_3 \to R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{-11}{2} \end{array}\right] \begin{array}{l} -2R_2 \to R_2 \\ -2R_3 \to R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \end{array}\right] -R_1 + R_2 \to R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \end{array}\right] -R_3 + R_3 \to R_2$$

AL SAMRAH

Subject : / /

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

يوجد عدد لانهائي من الحلول و Z مجهول اختياري

$x=4$

$y+2Z$

$0Z=0$

مجموعة الحلول

$S=\{(4,3-2Z,Z);\ Z\in\mathbb{R}\}$

4- طريقة كرامر

إذا كانت: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_j$

حيث:

$i=1,2,\dots,n$

جملة معادلات خطية معرفة على الحقل F ذات n مجهول و n معادلة ولتكن A مصفوفة الأمثال عندئذ:

★ إذا كانت $D=\det(A)\neq 0$

يوجد للجملة حل وحيد وهو:

حيث $x_q=\frac{D_q}{q}$ ، D_q هو محدد أمثال بعد مبادلة العمود q من أمثال x_q بعمود الجهة اليمنى في الجملة —

أي:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

تطبيق «8»: لتكن جملة المعادلات الخطية

$x-Z=4$

$2x+y-Z=4$

$x+2y+5Z=8$

أوجد الحل بطريقة كرامر --

الحل:

$$D=\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}-0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=7-3=4\neq 0$$

⇐ الجملة لها حل وحيد سنقوم بإيجاده:

$$D_x=\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}-0+(-1)\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=28-0=28$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{28}{4}=7$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 8 & 5 \end{vmatrix}$$

AL SAMRAH

Subject :

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 28 - 44 - 12 = -28$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-28}{4} = -7$$

$$D_Z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 0 + 12 = 12$$

$$\Rightarrow Z = \frac{D_Z}{D} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\Rightarrow S = \{(7, -7, 3)\}$$

* وإذا كانت $D = \det(A) = 0$ وكان يوجد $D_q \neq 0$ حيث $q \in \{1, 2, \ldots, n\}$ عندئذٍ تكون الجملة مستحيلة الحل.
* إذا كانت $D = 0$ وكانت $D_q = 0$ من أجل كل $q \in \{1, 2, \ldots, n\}$ فإن للجملة عدد لا نهائي من الحلول.

« مناقشة مجموعة حلول جملة معادلات خطية »

← **مبرهنة ^^ :** إذا كانت $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$ حيث $j = 1, 2, \ldots, n$ جملة معادلات خطية متجانسة معرفة على الحقل F ذات m معادلة و n مجهول، عندئذٍ:

1) للجملة حل وحيد هو الحل الصفري إذا كانت رتبة مصفوفة الأمثال r تساوي عدد المجاهيل n أي أن: $r = n$

2) للجملة عدد غير منتهٍ من الحلول إذا كانت رتبة مصفوفة الأمثال r أصغر من عدد المجاهيل n أي $r < n$

← **مبرهنة (2) ^^ :** إذا كانت:
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i$$
$j = 1, 2, \ldots, n$ جملة معادلات خطية غير متجانسة معرفة على الحقل F وذات m معادلة و n مجهول، عندئذٍ:

1) للمعادلة حل وحيد إذا كانت رتبة مصفوفة الأمثال r تساوي عدد المجاهيل وتساوي رتبة مصفوفة الأمثال الموسعة r' أي $r = r' = n$

2) للجملة عدد غير منتهٍ من الحلول إذا كانت رتبة مصفوفة الأمثال r تساوي رتبة مصفوفة الأمثال الموسعة r' وأصغر من عدد المجاهيل n أي ←

AL SAMRAH

Subject :

$\{r = r' \leq n\}$

ويكون عدد المجاهيل الاختيارية يساوي $(n-r)$

3) تكون الجملة مستحيلة الحل إذا كانت رتبة مصفوفة الأمثال r لا تساوي رتبة مصفوفة الأمثال الموسعة r' أي $\{r \neq r'\}$

الفصل الرابع: «الفضاءات الشعاعية»

تعريف

لتكن V مجموعة غير خالية ولتكن F حقلاً ما. نقول عن V أنه فضاء شعاعي معرّف على الحقل F إذا وفقط إذا كانت V مزودة بقانوني تشكيل، الأول داخلي ونسميه: «الجمع الشعاعي»

$$+ : V \times V \to V$$
$$(u,v) \mapsto u+v$$

حيث $u,v \in V$

الثاني قانون تشكيل خارجي ونسميه «الضرب السلمي» ومجموعة مؤثراته هو الحقل F:

$$\cdot : F \times V \to V$$
$$(\lambda,u) \mapsto \lambda.u \; : u \in V , \lambda \in F$$

بحيث تحقق الشروط التالية من أجل كل $u,v,w \in V$ وكل $\lambda,\mu \in F$

1- عملية الجمع الشعاعي تبديلية أي: $u+v = v+u$

2- عملية الجمع الشعاعي تجميعية أي $u+(v+w) = (u+v)+w$

3- يوجد عنصر «e» في الفضاء V يحقق: $u+e = e+u = u$
حيادي

4- لكل عنصر u في V يوجد عنصر u' في V يحقق: $u+u' = u'+u = e$ ونقول ان u' هو نظير u بالنسبة لعملية جمع الأشعة ونرمز له بـ $-u$ أي: $u+(-u) = (-u)+u = e$

5- $(\lambda+\mu).u = \lambda u + \mu.u$

6- $(\lambda.\mu).u = \lambda(\mu.u)$

7- $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$

8- من أجل $1 \in F$ «حيادي الضرب في الحقل F» فإن: $u = 1.u$

نرمز للفضاء الشعاعي بالثلاثية المرتبة: $(V,+,.)$
أو اختصاراً: V

ونسمي عناصر V بـ ... أشعة و
نسمي F ... λ,μ مؤثرات

ونرمز بـ 0_V صفر الفضاء V
و 0_F صفر الحقل F

The End

Subject : الجبر　　　　١٨ / ١٢ / ٢٠١٢

مثال (1) الحقل F يشكل فضاءً شعاعياً مرفقاً على نفسه مثل حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

مثال (2)

$V=\mathbb{R}^2=\{(x,y): x,y\in\mathbb{R}\},\ F=\mathbb{R}$

لنزود V بقانون تشكيل داخلي وهو الجمع الشعاعي: $+: V\times V\to V$

$((x,y),(x_2,y_2)) \longmapsto (x+x_2, y+y_2)$

والثاني خارجي وهو الضرب السلمي:

$\cdot : \mathbb{R}\times V_{\mathbb{R}^2}\to V$

$(\lambda(x,y))\longmapsto(\lambda x,\lambda y)$

أثبت أن $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ هو فضاء شعاعي لأنه

1- إذا كانت: $u_1(x_1,y_1),\ u_2(x_2,y_2)$ فإن

$u_1+u_2=(x_1+x_2, y_1+y_2)$ تعريف الجمع في $\mathbb{R}^2$

$=(x_2+x_1, y_2+y_1)$ الجمع تبديلي في $\mathbb{R}$

$=(x_2,y_2)+(x_1,y_1)=u_2+u_1$

وجمع الأشعة في $\mathbb{R}$ تبديلي ...

2- إذا كانت $u_1,u_2,u_3\in\mathbb{R}^2$ فإن:

$u_1+(u_2+u_3)=(x_1,y_1)+(x_2+x_3,y_2+y_3)$

$=(x_1+x_2+x_3, y_1+y_2+y_3)$

$=(x_1+x_2, y_1+y_2)+(x_3,y_3)$

$=(u_1+u_2)+u_3$

وجمع الأشعة في $\mathbb{R}^2$ تجميعي أيضاً ...

المحاضرة "3"

الجبر الخطي "1"

3- يوجد في $\mathbb{R}^2$ عنصر حيادي بالنسبة لعملية جمع الأشعة هو $(0,0)\in\mathbb{R}^2$

$(0,0)+(x,y)=(x,y)$

$(x,y)+(0,0)=(x,y)$

حيث: $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$

4- لكل عنصر $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ نظير بالنسبة لعملية جمع الأشعة هو: $-u=(-x,-y)$ حيث:

$u+(-u)=(0,0)$

$(-u)+u=(0,0)$

5- إذا كانت $\alpha,\beta\in F=\mathbb{R}$ و $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ فإن

$(\alpha+\beta).u=(\alpha+\beta)(x,y)=$

$((\alpha+\beta).x,(\alpha+\beta).y)=(\alpha x+\beta x, \alpha y+\beta y)$

$=(\alpha x,\alpha y)+(\beta x,\beta y)$

$=\alpha(x,y)+\beta(x,y)$

$=\alpha.u+\beta.u$

6- لتكن $\alpha\in\mathbb{R}$, $u_1,u_2\in\mathbb{R}^2$

$\alpha(u_1+u_2)=\alpha(x_1+x_2,y_1+y_2)$

$=(\alpha(x_1+x_2),\alpha(y_1+y_2))$

$=(\alpha x_1,\alpha y_1)+(\alpha x_2,\alpha y_2)$

$=\alpha u_1+\alpha u_2$

AL.SAMRAH

Subject :

7- لكل $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ولدينا:

$u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$(\alpha.\beta).u = (\alpha.\beta)(x,y)$

$= ((\alpha.\beta)x, (\alpha.\beta)y)$

$= (\alpha(\beta.x), \alpha(\beta.y))$

$= \alpha(\beta x, \beta y) = \alpha(\beta.u)$

8- $1 \in \mathbb{R}$ ولدينا: $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$1.u = 1(x,y) = (1x, 1y)$

نستنتج أن $(\mathbb{R}^2, +, .)$ فضاء شعاعي معرف على الحقل $\mathbb{R}$

مثال (3): إذا كانت n عدد طبيعي فإن $\mathbb{R}^n$

حيث $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$

مزودة بقانوني التشكيل $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

حيث: $u_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$u_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$u_1 + u_2 = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$:

حيث: $. : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$u = \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

و $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن:

إن $\mathbb{R}^n$ مزودة بقانوني التشكيل السابقين تشكل فضاء شعاعي معرف على الحقل $\mathbb{R}$

«وظيفة: أثبت ذلك»

مثال (4): يعطى في الحالة التالية إثبات F^n (حيث n عدد طبيعي) تشكل فضاء شعاعي معرف على الحقل F

مثال (5): إن مجموعة المصفوفات $M_{m \times n}(F)$ ذات المرتبة $m \times n$ والمعرفة على الحقل F مزودة بعملية جمع المصفوفات وضرب مصفوفة بعدد تشكل فضاءً شعاعياً معرفاً على الحقل F «أثبت ذلك»

نتيجة:

1. إذا كانت V فضاء شعاعياً معرفاً على الحقل F فإن:

1) $0_F . u = 0_V$

صفر الحقل — صفر الفضاء

2) $(-1).u = -u$

3) $\lambda . 0_V = 0_V$

4) $(-\lambda).u = \lambda.(-u) = -(\lambda.u)$

حيث $u \in V$, $\lambda \in F$

تعريف: (الفضاء الشعاعي الجزئي) هام!

ليكن V فضاء شعاعي معرف على الحقل F

وليكن $\emptyset \neq W \subseteq V$

مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء V

إذا وفقط إذا تحقق الشرطين:

1) المجموعة W مغلقة بالنسبة لعملية جمع الشعاعين أي $\forall u, v \in W$ فإن $u + v \in W$

2) المجموعة W مغلقة بالنسبة لعملية الضرب السلمي أي:

AL SAMRAH

Subject :

$\forall \lambda \in F , \forall u \in W$

فإن: $\lambda . u \in W$

نتيجة:

1- إذا كان W فضاءً شعاعياً جزئياً في V وكان: $w \in W$ فإن: $-w \in W$.

2- إذا كان W فضاءً شعاعياً جزئياً من V فإن مبادئ الجمع الشعاعي O_V يكون موجوداً دوماً في W وهو شرط لازم وغير كافٍ.

3- إن الفضاء الشعاعي والجزء السلمي تشكل فضاءً شعاعياً معرفاً على الحقل F

نتيجة هامة «بدون برهان»:

يمكن استبدال الشرطين السابقين «في تعريف الفضاء الشعاعي الجزئي» بالشرط التالي:

$\forall \alpha, \beta \in F , \forall u, v \in W$ فإن:

$\alpha u + \beta . v \in W$

أمثلة: ليكن $V = R^2$ فضاء شعاعي معرف

① على الحقل R عندئذٍ:

$W_1 = \{(x,0) \in R^2 . x \in R\}$.

تشكل فضاءً شعاعياً جزئياً في $V = R^2$

لأن $(0,0) \in W_1$

وليكن: $u_1, u_2 \in W_1 , \alpha, \beta \in R$

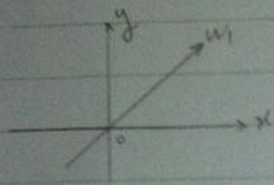
حيث $u_1(x_1, 0)$, $u_2(x_2, 0)$ عندئذٍ:

$\alpha u_1 + \beta . u_2 = \alpha (x_1, 0) + \beta (x_2, 0)$

$= (\alpha . x_1, 0) + (\beta x_2, 0) =$

$(\underbrace{\alpha x_1 + \beta x_2}_{\in R} , 0) \in W_1$

W_1 هو المحور ox في المستوي oxy



وليكن: $W_2 = \{(x,y) \in R^2 : x = y\}$

تشكل فضاء شعاعي جزئي في R^2

«أثبت ذلك»

② إن V الفضاء الشعاعي المعرف على الحقل F وهو نفسه فضاء شعاعي جزئي وكذلك $W = \{0\}$

تشكل فضاء شعاعي جزئي في V ←

AL SAMRAH