

**Syria Math**

المحاضرات التفاضلية 1



الكاتبة: عبك الله باليخ

المحاضرة: الثامنة (عملي) "الأخيرة"

التاريخ: ٢٠١٦/١٢/١٤

إعداد: محمد شوكلا & خالد الشمار

Web: [www.syriamath.net](http://www.syriamath.net)

group: Improve our mathematics



أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

$$y'' - 2y' = e^x \sin x$$

الحل :

نلاحظ أنها معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية مع طرف ثانٍ و بأمثال ثابتة :

أولاً : نوجد المعادلة المميزة للمعادلة دون طرف ثانٍ :

$$y'' - 2y' = 0$$

نعلم أن  $y = e^{\lambda x}$  هو الشكل للحل العام و أن  $y' = \lambda e^{\lambda x}$  ,  $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$  نعوض :

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 - 2\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$$

نلاحظ أن أصفار المعادلة المميزة هي جذور حقيقية مختلفة و بالتالي يكون :

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{2x} \quad \& \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} = 1$$

و الحل العام هو التركيب الخطي لهذين الحلين أي :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \Rightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2$$

ثانياً : نوجد الحل الخاص للمعادلة مع طرف ثانٍ :

إن الطرف الثاني  $e^x \sin x$  من الشكل  $g(x) = e^{ax}(A \cos bx + B \sin bx)$  حيث

$a = b = 1, A = 0, B = 1$  و هنا نناقش فيما إذا كان  $a+ib=1+i$  جذراً للمعادلة المميزة فنجد أنه

ليس جذراً فيكون الحل الخاص من الشكل :

$$y_p = e^{ax}(A \cos bx + B \sin bx)$$

$$\Rightarrow y_p = e^x(A \cos x + B \sin x)$$

و لتحديد  $A, B$ : نقوم بإيجاد  $y_p', y_p''$  و نعوض في المعادلة الأصلية ،

بالحساب نجد :

$$y_p' = e^x(A \cos x + B \sin x - A \sin x + B \cos x)$$

$$y_p'' = e^x(-2A \sin x + 2B \cos x)$$

نعوض في المعادلة الأصلية :



$$e^x(-2A \sin x + 2B \cos x) - 2e^x(A \cos x + B \sin x - A \sin x + B \cos x) = e^x \sin x$$

$$\Rightarrow -2A \cos x - 2B \sin x = \sin x$$

بالمطابقة نجد :

$$-2A = 0 \Rightarrow A = 0 \quad \& \quad -2B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

نعوض في الحال الخاص :

$$y_p = -\frac{1}{2} e^x \sin x$$

فيكون الحل العام للمعادلة الأصلية :

$$Y = y + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 - \frac{1}{2} e^x \sin x$$

**نعيد التذكير بالملاحظة التالية :** على فرض كانت لدينا المعادلة المميزة:

$$\lambda^2 (\lambda - 1) = 0$$

فيكون الحل العام هو :

$$y = c_1 \cdot e^{0 \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{0 \cdot x} + c_3 \cdot e^x$$

أما إذا كانت من الشكل :

$$(\lambda - 1)(\lambda + i)^2(\lambda - i)^2 = 0$$

الجذور عقدية مكررة ، فالحل العام هو :

$$y = c_1 \cdot e^x + e^{0x}(c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \sin x) + x \cdot e^{0x}(c_4 \cdot \cos x + c_5 \cdot \sin x)$$

(هنا  $0 \pm i$  مكرر مرتين (الجذران المترافقان مكرران مرتين) و بالتالي سيقابله

$$\text{المقدار } (e^{0x}(c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \sin x) + x \cdot e^{0x}(c_4 \cdot \cos x + c_5 \cdot \sin x))$$

وإذا كانت :

$$(\lambda - 1)^2(\lambda - (1 - 2i))^3 = 0$$

فالحل العام هو :

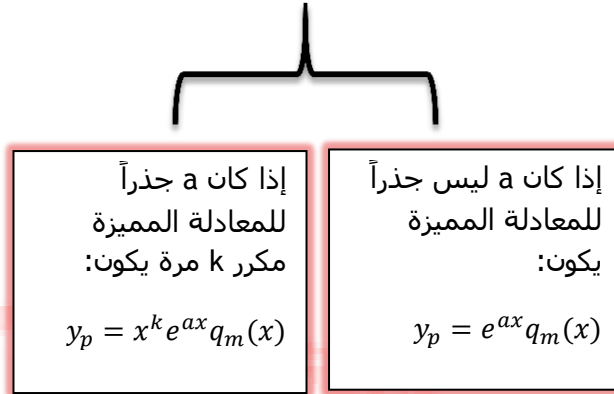
$$y = (c_1 + c_2)e^x + e^x((c_3 + c_4 \cdot x + c_5 \cdot x^2) \cos 2x + (c_6 + c_7 \cdot x + c_8 \cdot x^2) \sin 2x)$$

الآن لندرس الحالات التالية :

(١) إذا كان الطرف الثاني من الشكل :

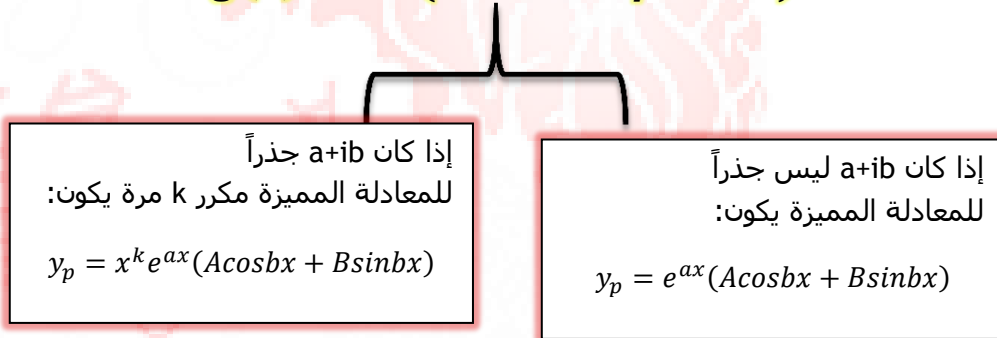


$$g(x) = e^{ax} P_m(x)$$



(٢) إذا كان الطرف الثاني من الشكل :

$$g(x) = e^{ax} (\alpha \cos bx + \beta \sin bx)$$



تمارين :

$$y'' - 2y' = e^x(x + 2)$$

**الحل :** و جدنا أن الحل العام للمعادلة دون طرف ثانٍ هو :

$$y = c_1 e^{2x} + c_2$$

أما في صدد إيجاد الحل الخاص ، فنلاحظ أن الطرف الثاني من الشكل :

$$g(x) = e^{ax} P_m(x) \quad : a = 1, m = 1$$

و أن  $a=1$  ليست جذراً للمعادلة المميزة و بالتالي الحل الخاص من الشكل :

$$y_p = e^{ax} q_1(x) = e^x (Ax + B)$$

و لتعيين الثوابت  $A, B$  نشتق و نعوض في المعادلة الأصلية :



$$y_p' = e^x(Ax + A + B)$$

$$y_p'' = e^x(Ax + 2A + B)$$

نعوض في المعادلة الأصلية :

$$e^x(Ax + 2A + B) - 2e^x(Ax + A + B) = e^x(x + 2)$$

$$\Rightarrow -Ax - B = x + 2$$

بمطابقة أمثال القوى المتساوية نجد :

$$A = -1, B = -2$$

و بالتالي  $q_1(x) = -x - 2$  و الحل الخاص :

$$y_p = e^x(-x - 2)$$

و الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة :

$$Y = y + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 - e^x(x + 2)$$

$$y'' - 2y' = x^2 + 3$$

الحل :

وجدنا من التمارين السابقة أن الحل العام للمعادلة دون طرف ثانٍ هو :

$$y = c_1 e^{2x} + c_2$$

أما لإيجاد الحل الخاص فنلاحظ أن الطرف الثاني هو :

$$g(x) = e^{0x}(x^2 + 3) = e^{ax}P_m(x) \quad : a=0, m=2$$

و أن  $a=0$  هو جذر للمعادلة المميزة مكرر مرة واحدة ( $k=1$ ) فالحل الخاص :

$$y_p = x^k e^{ax} q_2(x) = x e^{0x}(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

و لتعيين A,B,C نشتق الحل الخاص و نعوض في المعادلة المعطاة :

$$y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$y_p'' = 6Ax + 2B$$

نعوض في المعادلة الأصلية :

$$3Ax^2 + 2Bx + C - 2(6Ax + 2B) = x^2 + 3$$



$$\Rightarrow -6Ax^2 + (6A - 4B)x + 2B - 2C = x^2 + 3$$

نطابق الأمثال :

$$-6A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{6}$$

$$6A - 4B = 0 \Rightarrow B = \frac{6A}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$2B - 2C = 3 \Rightarrow C = \frac{2B - 3}{2} = -\frac{7}{4}$$

فالحل الخاص :  $y_p = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{4}x$  و الحل العام :

$$Y = y + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{4}x$$

$$y'' + 4y = -10 \sin 3x$$

الحل :

أولاً : نوجد المعادلة المميزة فنجد أنها  $\lambda^2 + 4 = 0$  و بالتالي للمعادلة جذرين عقديين مترافقين هما :

$$\lambda = \pm 2i = 0 \pm 2i$$

إن للمعادلة المميزة جذر عقدي غير مكرر من الشكل  $a+bi$  حيث  $a=0, b=2$

فلمعادلة حل عام من الشكل  $y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$  أي :

$$y = e^{0x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

أما الحل الخاص فسنجده بعد ملاحظة أن الطرف الثاني من المعادلة التفاضلية هو :

$$g(x) = -10 \sin 3x = e^{0x}(0 \cos 3x - 10 \sin 3x)$$

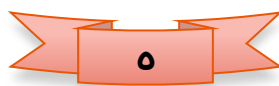
أي أن الطرف الثاني من الشكل  $e^{ax}(\alpha \cos bx + \beta \sin bx)$

حيث  $a = 0, b = 3, \alpha = 0, \beta = -10$  و أن  $a + bi = 3i$  ليس جذراً للمعادلة المميزة فالحل

الخاص يكون :

$$y_p = e^{ax}(A \cos bx + B \sin bx) = e^{0x}(A \cos 3x + B \sin 3x) \\ = A \cos 3x + B \sin 3x$$

و لتعيين الثوابت  $A, B$  نوجد :





$$y'_p = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$$

$$y''_p = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$$

نعوض في المعادلة الأصلية :

$$-3A\sin 3x + 3B\cos 3x + 4(A\cos 3x + B\sin 3x) = -10\sin 3x$$

$$\Leftrightarrow A\cos 3x + B\sin 3x = 2\sin 3x \Rightarrow A = 0, B = 2$$

نعوض في  $y_p$  :

$$y_p = 2\sin 3x$$

و الحال العام من الشكل :

$$Y = y + y_p = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + 2\sin 3x$$

$$y'' + 4y = 2e^x \sin 2x$$

الحل :

أولاً : نوجد المعادلة المميزة فنجد أنها  $\lambda^2 + 4 = 0$  و بالتالي للمعادلة جذرين عقديين مترافقين هما :

$$\lambda = \pm 2i = 0 \pm 2i$$

إن للمعادلة المميزة جذر عقدي غير مكرر من الشكل  $a+bi$  حيث  $a=0, b=2$

فالمعادلة حل عام من الشكل  $y = e^{ax}(c_1\cos bx + c_2\sin bx)$  أي :

$$y = e^{0x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$$

أما الحل الخاص فنسوقه بعد ملاحظة أن الطرف الثاني من المعادلة التفاضلية هو :

$$g(x) = 2e^x \sin 2x = e^{ax}(0\cos 2x + 2\sin 2x)$$

أي أن الطرف الثاني من الشكل  $e^{ax}(a\cos bx + \beta\sin bx)$

حيث  $a = 1, b = 2, \alpha = 0, \beta = 2$  و أن  $a + bi = 1 + 2i$  ليس جذراً للمعادلة المميزة فالحل

الخاص يكون :

$$y_p = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx) = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

$$= A\cos 3x + B\sin 3x$$



و لتعيين الثوابت  $A, B$  نشتق و نعوض في المعادلة الأصلية و نطابق كما في المثال السابق

$$y'' + 4y = 2\sin 2x$$

الحل :

أيضاً ، كما في المثال السابق أن الحل العام للمعادلة دون طرف ثان  $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$  أما للحل الخاص ، فالطرف الثاني هو  $g(x) = e^{0x}(2\sin 2x)$  و أن  $0 + 2i$  هو جذر مكرر مرة واحدة للمعادلة المميزة ( $k=1$ ) فالحل الخاص :

$$y_p = x e^{0x} (A \cos 2x + B \sin 2x) = x (A \cos 2x + B \sin 2x)$$

و أيضاً يتم تعيين  $A, B$  بالاشتقاق و التعويض و المطابقة .

بذلك تكون قد نكون أنهينا المحاضرة الأخيرة آملين أن نكون قد قدمنا لكم مادة مفيدة و راجين الله تعالى أن يوفقكم في جميع المواد و أن يوفقنا في تطوير كل ما نقدمه لكم في سبيل تطوير رياضياتنا .



مع تحيات فريق سيريا ماث التطوعي ^\_^