المعادلات التفاضلية 1

الدكتور: عبد الله الماليح

المحاضرة :الثامنة (عملي) "الأخيرة"

التاريخ : ١٤/١٢/٢٠١٦

إعداد: محمد شهلا & خالد الشعار

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

$$y'' - 2y' = e^x sinx$$

الحل :

نلاحظ أنها معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية مع طرف ثانٍ و بأمثال ثابتة :

أولاً : نوجد المعادلة المميزة للمعادلة دون طرف ثانٍ :

$$y'' - 2y' = 0$$

نعلم أن $y = e^{\lambda x}$ هو الشكل للحل العام و أن $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$,$y' = \lambda e^{\lambda x}$ نعوض :

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 - 2\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 2\,, \lambda_2 = 0$$

نلاحظ أن أصفار المعادلة المميزة هي جذور حقيقية مختلفة و بالتالي يكو ن :

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{2x} \quad \& \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} = 1$$

و الحل العام هو التركيب الخطي لهذين الحلين أي :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \Longrightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2$$

ثانياً : نوجد الحل الخاص للمعادلة مع طرف ثانٍ:

إن الطرف الثاني $e^x sinx$ من الشكل $g(x) = e^{ax}(A\ cosbx + B\ sinbx)$ حيث

$a = b = 1, A = 0, B = 1$ و هنا نناقش فيما إذا كان a+ib=1+i جذراً للمعادلة المميزة فنجد أنه ليس جذراً فيكون الحل الخاص من الشكل :

$$y_p = e^{ax}(A\ cosbx + B\ sinbx)$$
$$\Longrightarrow y_p = e^x(A\ cosx + Bsinx)$$

و لتحديد A,B: نقوم بايجاد y_p', y_p'' و نعوض في المعادلة الأصلية ،

بالحساب نجد :

$$y_p' = e^x(A\ cosx + B\ sinx - A\ sinx + B\ cosx)$$
$$y_p'' = e^x(-2A\ sinx + 2B\ cosx)$$

نعوض في المعادلة الأصلية :

$$e^x(-2A\ sinx + 2B\ cosx) - 2e^x(A\ cosx + B\ sinx - A\ sinx + B\ cosx) = e^x sinx$$
$$\Longrightarrow -2A\ cosx - 2B\ sinx = sinx$$

بالمطابقة نجد :

$$-2A = 0 \Longrightarrow A = 0 \qquad \& \qquad -2B = 1 \Longrightarrow B = -\frac{1}{2}$$

نعوض في الحال الخاص :

$$y_p = -\frac{1}{2}e^x sinx$$

فيكون الحل العام للمعادلة الأصلية :

$$Y = y + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 - \frac{1}{2}\ e^x sinx$$

نعيد التذكير بالملاحظة التالية : على فرض كانت لدينا المعادلة المميزة:

$$\lambda^2(\lambda - 1) = 0$$

فيكون الحل العام هو:

$$y = c_1.e^{0.x} + c_2.x.e^{0.x} + c_3.e^x$$

أمّا إذا كانت من الشكل:

$$(\lambda - 1)(\lambda + i)^2(\lambda - i)^2 = 0$$

الجذور عقديّة مكرّرة ، فالحل العام هو:

$$y = c_1.e^x + e^{0x}(c_2.cos\,x + c_3.sin\,x) + x.e^{0x}(c_4.cos\,x + c_5.sin\,x)$$

(هنا $0 \pm i$ مكرر مرتين (الجذران المترافقان مكرران مرتين) و بالتالي سيقابله

المقدار $(e^{0x}(c_2.cos\,x + c_3.sin\,x) + x.e^{0x}(c_4.cos\,x + c_5.sin\,x)$

وإذا كانت:

$$(\lambda - 1)^2\big(\lambda - (1 - 2i)\big)^3 = 0$$

فالحل العام هو:

$$y = (c_1 + c_2)e^x + e^x\big((c_3 + c_4.x + c_5.x^2)\,cos\,2x + (c_6 + c_7.x + c_8.x^2)\,\sin 2x\big)$$

الآن لندرس الحالات التالية :

١) إذا كان الطرف الثاني من الشكل :

$$g(x) = e^{ax}P_m(x)$$

إذا كان a ليس جذراً للمعادلة المميزة يكون:

$$y_p = e^{ax}q_m(x)$$

إذا كان a جذراً للمعادلة المميزة مكرر k مرة يكون:

$$y_p = x^k e^{ax}q_m(x)$$

٢) إذا كان الطرف الثاني من الشكل :

$$g(x) = e^{ax}(\alpha cosbx + \beta sinbx)$$

إذا كان a+ib ليس جذراً للمعادلة المميزة يكون:

$$y_p = e^{ax}(Acosbx + Bsinbx)$$

إذا كان a+ib جذراً للمعادلة المميزة مكرر k مرة يكون:

$$y_p = x^k e^{ax}(Acosbx + Bsinbx)$$

تمارين :

$$y'' - 2y' = e^x(x+2)$$

الحل : و جدنا أن الحل العام للمعادلة دون طرف ثانٍ هو :

$$y = c_1 e^{2x} + c_2$$

أما في صدد إيجاد الحل الخاص ، فنلاحظ أن الطرف الثاني من الشكل :

$$g(x) = e^{ax}P_m(x) \quad : a = 1\,, m = 1$$

و أنّ a=1 ليست جذراً للمعادلة المميزة و بالتالي الحل الخاص من الشكل :

$$y_p = e^{ax}q_1(x) = e^x(Ax + B)$$

و لتعيين الثوابت A,B نشتق و نعوض في المعادلة الأصلية :

$$y_p' = e^x(Ax + A + B)$$
$$y_p'' = e^x(Ax + 2A + B)$$

نعوض في المعادلة الأصلية :

$$e^x(Ax + 2A + B) - 2e^x(Ax + A + B) = e^x(x + 2)$$
$$\Rightarrow -Ax - B = x + 2$$

بمطالقة أمثال القوى المتساوية نجد :

$$A = -1, B = -2$$

و بالتالي : $q_1(x) = -x - 2$ و الحل الخاص :

$$y_p = e^x(-x - 2)$$

و الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة :

$$Y = y + y_p = c_1e^{2x} + c_2 - e^x(x + 2)$$

$y'' - 2y' = x^2 + 3$

الحل :

وجدنا من التمارين السابقة أن الحل العام للمعادلة دون طرف ثانٍ هو :

$$y = c_1e^{2x} + c_2$$

أما لإيجاد الحل الخاص فنلاحظ أن الطرف الثاني هو :

$$g(x) = e^{0x}(x^2 + 3) = e^{ax}P_m(x) \quad :a=0 \ , \ m=2$$

و أن a=0 هو جذر للمعادلة المميزة مكرر مرة واحدة (k=1) فالحل الخاص :

$$y_p = x^k e^{ax} q_2(x) = xe^{0x}(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

و لتعيين A,B,C نشتق الحل الخاص و نعوض في المعادلة المعطاة :

$$y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$
$$y_p'' = 6Ax + 2B$$

نعوض في المعادلة الأصلية :

$$3Ax^2 + 2Bx + C - 2(6Ax + 2B) = x^2 + 3$$

$$\Longrightarrow -6Ax^2+(6A-4B)x+2B-2C=x^2+3$$

نطابق الأمثال :

$$-6A=1 \Longrightarrow\Longrightarrow A=-\frac{1}{6}$$
$$6A-4B=0 \Longrightarrow B=\frac{6A}{4}=-\frac{1}{4}$$
$$2B-2C=3 \Longrightarrow C=\frac{2B-3}{2}=-\frac{7}{4}$$

فالحل الخاص : $y_p=-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{7}{4}x$ و الحل العام :

$$Y=y+y_p=c_1e^{2x}+c_2-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{7}{4}x$$

$y''+4y=-10\,sin3x$

الحل :

أولاً : نوجد المعادلة المميزة فنجد أنها $\lambda^2+4=0$ و بالتالي للمعادلة جذرين عقدين مترافقين هما :

$$\lambda=\pm 2i=0\pm 2i$$

إن للمعادلة المميزة جذر عقدي غير مكرر من الشكل a+bi حيث a=0 ,b=2

فللمعادلة حل عام من الشكل $y=e^{ax}(c_1cosbx+c_2sinbx)$ أي :

$$y=e^{0x}(c_1cos2x+c_2\,sin2x)=c_1\,cos2x+c_2sin2x$$

أما الحل الخاص فسنوجده بعد ملاحظة أن الطرف الثاني من المعادلة التفاضلية هو :

$$g(x)=-10\,sin3x=e^{0x}(0\,cos3x-10\,sin3x)$$

أي أن الطرف الثاني من الشكل $e^{ax}(\alpha cosbx+\beta\,sinbx)$

حيث $a=0\,,b=3,\alpha=0,\beta=-10$ و أنّ $a+bi=3i$ ليس جذراً للمعادلة المميزة فالحل الخاص يكون :

$$y_p=e^{ax}(A\,cosbx+Bsinbx)=e^{0x}(Acos3x+Bsin3x)$$
$$=Acos3x+Bsin3x$$

و لتعيين الثوابت A,B نوجد :

$$y_p' = -3Asin3x + 3Bcos3x$$
$$y_p'' = -9Acos3x - 9Bsin3x$$

نعوض في المعادلة الأصلية :

$$-3Asin3x + 3Bcos3x + 4(Acos3x + Bsin3x) = -10sin3x$$
$$\Leftrightarrow Acos3x + Bsin3x = 2sin3x \Longrightarrow\Longrightarrow A = 0\,, B = 2$$

نعوض في y_p :

$$y_p = 2sin3x$$

و الحال العام من الشكل :

$$Y = y + y_p = c_1cos2x + c_2sin2x + 2sin3x$$

$y'' + 4y = 2e^x sin2x$

الحل :

أولاً : نوجد المعادلة المميزة فنجد أنها $\lambda^2 + 4 = 0$ و بالتالي للمعادلة جذرين عقدين مترافقين هما :

$$\lambda = \pm 2i = 0 \pm 2i$$

إن للمعادلة المميزة جذر عقدي غير مكرر من الشكل a+bi حيث a=0 ,b=2

فللمعادلة حل عام من الشكل $y = e^{ax}(c_1cosbx + c_2sinbx)$ أي :

$$y = e^{0x}(c_1cos2x + c_2\, sin2x) = c_1\, cos2x + c_2sin2x$$

أما الحل الخاص فسنوجده بعد ملاحظة أن الطرف الثاني من المعادلة التفاضلية هو :

$$g(x) = 2e^xsin2x = e^{ax}(0\, cos2x + 2\, sin2x)$$

أي أن الطرف الثاني من الشكل $e^{ax}(\alpha cosbx + \beta\, sinbx)$

حيث $a = 1\,, b = 2, \alpha = 0, \beta = 2$ و أنّ $a + bi = 1 + 2i$ ليس جذراً للمعادلة المميزة فالحل

الخاص يكون :

$$y_p = e^{ax}(A\, cosbx + Bsinbx) = e^x(Acos2x + Bsin2x)$$
$$= Acos3x + Bsin3x$$

و لتعيين الثوابت A,B نشتق و نعوض في المعادلة الأصلية و نطابق كما في المثال السابق

$$y'' + 4y = 2sin2x$$

الحل :

أيضاً ، كما في المثال السابق أن الحل العام للمعادلة دون طرف ثان $y = c_1 cos2x + c_2 sin2x$

أما للحل الخاص ، فالطرف الثاني هو $g(x) = e^{0x}(2sin2x)$ و أن $0 + 2i$ هو جذر مكرر مرة واحدة للمعادلة المميزة *(k=1)* فالحل الخاص :

$$y_p = xe^{0x}(Acos2x + Bsin2x) = x(Acos2x + Bsin2x)$$

و أيضاً يتم تعيين A,B بالاشتقاق و التعويض و المطابقة .

بذلك تكون قد نكون أنهينا المحاضرة الأخيرة آملين أن نكون قد قدمنا لكم مادةً مفيدة و راجين الله تعالى أن يوفقكم في جميع المواد و أن يوفقنا في تطوير كل ما نقدمه لكم في سبيل تطوير رياضياتنا .

مع تحيات فريق سيريا ماث التطوعي ^_^