Syria Math

التحليل 3

الدكتور: يحيى قطيش

المحاضرة : الخامسة عشر

التاريخ : ٣٠/١١/٢٠١٦

إعداد : نذير تيناوي

قاعدة ليجاندر:

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}.\Gamma(2p)$$

الإثبات

لدينا

$$B(p,p)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{p-1}\,dx=\int_0^1 (x-x^2)^{p-1}\,dx$$

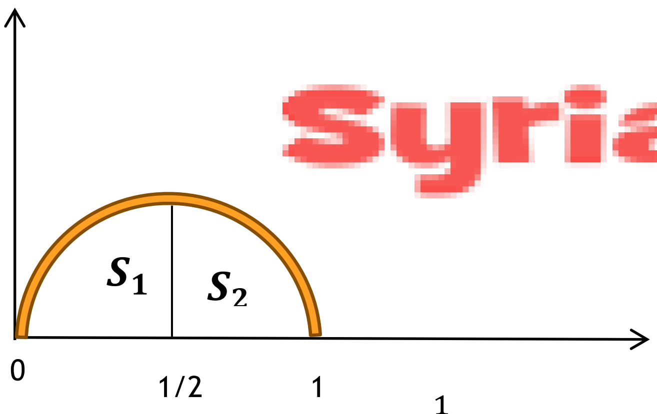
نقوم بالإتمام إلى مربع كامل حيث

$$(x-x^2)=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$$

بالعودة للتكامل السابق و التعويض :

$$B(p,p)=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}\,dx$$

و لما كان التابع $f(x)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$ يرسم قطعاً مكافئاً فإنه يكون متناظراً بالنسبة لمحور تناظره $x=\frac{1}{2}$



$$B(p,p)=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}\,dx$$

نفرض $\frac{1}{4}t=\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$

أو:

$$\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

نفاضل الطرفين:

$$\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\,dt=-dx$$

$$\Longrightarrow dx=-\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

بالتعويض بالتكامل:

$$B(p,p)=-2\int_{1}^{0}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}t\right)\right]^{p-1}.\left(-\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\right)\,dt$$

$$=-2\int_{1}^{0}\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}t\right]^{p-1}\,dt$$

$$=-2\int_{1}^{0}\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}(1-t)\right]^{p-1}\,dt$$

$$=-\frac{2.1}{4}\int_{1}^{0}t^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}(1-t)\right]^{p-1}\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{1}^{0}t^{-\frac{1}{2}}.(1-t)^{p-1}.\frac{1}{4^{p-1}}\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}.\frac{1}{4^{p-1}}\int_{1}^{0}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1}{2^{2p-2}}\int_{0}^{1}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$=\frac{1}{2^{2p-1}}\int_{0}^{1}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$\Rightarrow B(p,p) = \frac{1}{2^{2p-1}} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{p-1}\, dt$$

العلاقة بين تكاملي أولر حيث: $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

هنا:

$$B(p,p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(p+p)} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}} B\left(-\frac{1}{2}+1\,,p-1+1\right)$$

$$= \frac{1}{2^{2p-1}} B\left(\frac{1}{2},p\right)$$

لقد حصلنا على $B\left(\frac{1}{2},p\right)$ من الأسس حيث $t^{-\frac{1}{2}}$ أسه $-\frac{1}{2}$ نضيف له واحد فيصبح $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ وحصلنا على الـp من أس $(1-t)^{p-1}$ نضيف للأس واحد فيصبح $p-1+1=p$ ولذلك $B\left(\frac{1}{2},p\right)$

ومنه:

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Gamma(p)\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2p-1}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)\Gamma(2p)$$

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2p-1}} \Gamma(p)\Gamma(2p)$$

حيث $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ كما حسبناه بالمحاضرة السابقة.

ومنه:

$$\boxed{\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}} \Gamma(2p)}$$

مثال: أوجد التكامل

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\, dx \qquad ; \quad a>0$$

نستخدم طريقة تغيير المتحول:

نفرض: $x = at^{\frac{1}{2}}$

$$x^2 = a^2 t$$

$$dx = \frac{1}{2} a t^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

نقوم بتغيير حدود التكامل لأننا قمنا بتغيير المتحول:

$$x = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$x = a \Rightarrow t = 1$$

والآن نعوض بالتكامل:

$$I = \int_0^1 a^2 t \sqrt{a^2 - a^2 t}.\frac{1}{2} a t^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

$$I = a^3 \int_0^1 t \sqrt{a^2(1-t)}.\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

$$= a^3 \int_0^1 t^{\frac{1}{2}}.a.\sqrt{1-t}.\frac{1}{2}\, dt$$

$$\Rightarrow I = \frac{a^4}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}}\, dt$$

$$= \frac{a^4}{2} B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ تم الحصول عليها من الأسس

حيث $t^{\frac{1}{2}}$ أسه $\frac{1}{2}$ نضيف له واحد فيصبح $\frac{3}{2}$ و $(1-t)^{\frac{1}{2}}$ أسه $\frac{1}{2}$ نضيف له واحد فيصبح $\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow I = \frac{a^4}{2} B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{a^4}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{a^4}{2}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)} = \frac{a^4}{2}.\frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{a^4\pi}{2^4}$$

لأن:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

من القانون:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

أي:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\frac{1}{2}$$

ونحن نعلم أن $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

ومنه:

$$\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2 = \frac{\pi}{4}$$

وَ

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2.\Gamma(2) = 2.\Gamma(1+1)$$
$$= 2.1\Gamma(1) = 2.1.1 = 2$$

ومنه:

$$\Gamma(3) = 2! = 2$$

وبالتالي:

$$\boxed{I = \frac{a^4.\pi}{2^4}}$$

مثال: أوجد التكامل

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$$

$$J=\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}dx$$

هذا التكامل من الشكل:

$$B(p,q)=\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$$

حيث:

$$p-1=\frac{1}{4}\Longrightarrow p=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$$

$$p+q=2\Longrightarrow q=2-p=2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$$

$$J=\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}dx=B\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}$$

نذكر أن:

$$\frac{5}{4}=\frac{1}{4}+1\quad,\quad\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$

$$\Gamma(2)=\Gamma(1+1)=1.\Gamma(1)=1$$

ومنه:

$$J=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)}{1}$$

$$J=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

حيث نلاحظ أنها من الشكل:

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)$$

فحسب قاعدة ليجاندر:

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)$$

بالعودة للمثال:

$$J=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\left(\frac{1}{4}\right)-1}}\Gamma\left(2\left(\frac{1}{4}\right)\right)=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{-\frac{1}{2}}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$J=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{-\frac{1}{2}}}.\sqrt{\pi}=\frac{\sqrt{2}.\pi}{4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

مثال: أوجد التكامل:

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$$

$$=\int_0^1(1-x^n)^{-\frac{1}{n}}dx$$

بتغيير المتحول:

نفرض: $x^n=t$

$$\Longrightarrow x=t^{\frac{1}{n}}$$

$$dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$$

نغير حدود التكامل لأننا قمنا بتغيير المتحول:

$$x=0\Longrightarrow t=1$$

$$x=1\Longrightarrow t=1$$

ومنه:

$$I=\frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{-\frac{1}{n}}dt$$

$$=\frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)$$

تم حساب $B\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)$ من أسس الـ t, $(1-t)$

حيث أس t هو $\left(\frac{1}{n}-1\right)$ نضيف واحد فيصبح $\frac{1}{n}$ كما أن أس $(1-t)$ هو $\left(-\frac{1}{n}\right)$ نضيف واحد فيصبح $\left(1-\frac{1}{n}\right)$ ومنه $B\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)$

ومنه:

$$I=\frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)$$

وَ $B\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)$ من الشكل $B(p,1-p)$

ونحن نعلم من محاضرات سابقة أن:

$$B(p,1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$$

ومنه:

$$I=\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

مثال: أوجد التكامل

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,.\cos^n x\;dx\quad;\quad m,n\in\mathbb{N}$$

حسب الشكل المثلثي للتكامل البتاوي:

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\,.\cos^{2q-1}\theta\;d\theta$$

$$m=2p-1\Rightarrow 2p=m+1\Rightarrow p=\frac{m+1}{2}$$

$$n = 2q - 1 \Rightarrow 2q = n + 1 \Rightarrow q = \frac{n+1}{2}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, . \cos^n x \; dx$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$

و لنأخذ مثال عن حالة خاصة عندما $m = 6 \, , n = 4$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \, . \cos^4 x \; dx$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{12}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}{5.4.3.2.1} \cdot \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$$

تم حساب $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$ و $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ و $\Gamma(6)$

من القانون $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$

حيث:

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{2} + 1\right) = \frac{5}{2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\Gamma(6)=5!$$

وبالتالي بالاختصار نجد:

$$I=\frac{3\pi}{2^9}=\frac{3\pi}{512}$$

مثال: أوجد التكامل

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^n x\ dx \quad : n=2k : k\in Z$$

بتغيير المتحول:

نفرض $\tan x=t^{\frac{1}{2}} \Leftarrow x=\arctan t^{\frac{1}{2}}$

ومنه:

$$dx=\frac{1}{2}\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{1+t}dt$$

نغير حدود التكامل:

$$x=0\Longrightarrow t=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow t=\infty$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{n}{2}}.t^{-\frac{1}{2}}}{1+t}\ dt$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{n-1}{2}}}{1+t}\ dt$$

$$I = \frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2}, 1 - \frac{n+1}{2}\right)$$

تم الحصول على $B\left(\frac{n+1}{2}, 1-\frac{n+1}{2}\right)$ من الأسس

حيث:

$$\frac{n-1}{2} = p - 1 \Rightarrow p = \frac{n+1}{2}$$

و $p + q = 1 \Rightarrow q - 1 = -p \Rightarrow q = 1 - p$

$$q = 1 - \frac{n+1}{2} = \frac{2-n+1}{2} = 1 - \frac{n+1}{2}$$

ومنه:

$$I = \frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2}, 1 - \frac{n+1}{2}\right)$$

نلاحظ أن $B\left(\frac{n+1}{2}, 1-\frac{n+1}{2}\right)$ من الشكل $B(p, 1-p)$ ونحن نعلم و استنتجنا سابقاً أن:

$$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

ومنه:

$$I = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{n+1}{2}.\pi}$$

"انتهت المحاضرة"

نذير تيناوي